

NOTA

GEOMETRIA FRACTAL EM FISICA DO SOLO

O.O.S.BACCHI¹

Centro de Energia Nuclear na Agricultura/USP - C.P. 96, CEP: 13400-970-Piracicaba,SP.

K.REICHARDT¹

Departamento de Física e Meteorologia - ESALQ/USP - C.P. 9, CEP: 13418-900-Piracicaba,SP.

RESUMO: A geometria fractal tem sido aplicada nos mais diversos ramos da ciência, mostrando grande potencial na descrição de estruturas altamente complexas. A sua aplicação em ciência do solo tem despertado grande interesse e vem se intensificando nos últimos anos. Apesar da sua divulgação através da literatura científica internacional, de conhecido acesso por parte dos pesquisadores brasileiros, o assunto parece não ter merecido ainda a nossa atenção, a contar pela ausência do tema em nossas revistas especializadas. Tratamos aqui da conceituação básica dessa nova abordagem e de algumas aplicações em física do solo.

Descritores: fractal, geometria fractal, estrutura do solo, composição granulométrica, curva de retenção.

FRactal Geometry in Soil Physics

ABSTRACT: Fractal geometry has been applied on different branches of science, showing high potential in describing complex structures. Its applications in soil science have received large attention and have been intensified in the last few years. In spite of the large number of internationally published papers, the subject seems not having received the same attention by Brazilian soil scientists, as verified by the absence of the subject in our scientific journals. This paper presents the basic concepts of this new tool and some of its applications in soil physics.

Key Words: fractal, fractal geometry, soil structure, particle size distribution, retention curves.

INTRODUÇÃO

Uma das dificuldades nos estudos dos processos que ocorrem no espaço poroso do solo, tais como a retenção e movimento da água, está em se estabelecer modelos geométricos capazes de simular razoavelmente bem a estrutura do solo, que permita a caracterização de algumas relações fundamentais entre partículas e espaço poroso que governam tais processos. Dessa forma, os inúmeros modelos e equações desenvolvidos para esses processos não apresentam um desenvolvimento analítico baseado em características fundamentais do sistema, sendo portanto empíricos e, como tais, oferecem variados graus de sucesso quanto à sua aplicabilidade geral. Um dos poucos trabalhos que se baseiam em modelos simulados de estrutura do solo e apresentam um desenvolvimento analítico para condutividade hidráulica do solo é o de MUALEM (1976), complementado por

GENUCHTEN (1978,1980) através do desenvolvimento de uma nova equação para curva de retenção da água em solos.

A geometria de estruturas complexas, altamente irregulares, como dos solos, tem sido objeto de recentes estudos, contando-se para isso com o auxílio da matemática fractal. A sua aplicação em ciência do solo é recente e mostra-se bastante promissora na medida em que permite identificar o significado físico de certos parâmetros de ajuste estatístico de modelos empíricos. Tal abordagem parece indicar um bom caminho para uma melhor caracterização da estrutura do solo e sua aplicação no desenvolvimento analítico de futuros modelos para os mencionados processos.

Apesar da crescente divulgação dessa nova ferramenta de trabalho através da literatura científica internacional, de reconhecido acesso aos pesquisadores brasileiros, o tema parece não ter

¹ Bolsista do CNPq.

despertado grande atenção entre nós, o que se constata pela ausência de trabalhos publicados sobre o assunto em nossas revistas especializadas. Pretende-se aqui tratar da conceituação básica da geometria fractal e de uma rápida análise de suas possibilidades em física do solo.

Conceitos básicos

Dimensão topológica e Dimensão fractal.

Na geometria Euclideana pode-se medir facilmente o comprimento L de uma linha reta através de uma certa escala de medida ϵ , onde $\epsilon \leq L$, obtendo-se:

$$L(\epsilon) N \epsilon^1 = \text{constante} \quad (1)$$

onde N é o número de unidades de medida ϵ necessário para cobrir a distância L . O expoente unitário é consistente com a dimensão topológica da linha reta. Na medida em que se diminui ϵ , N aumenta proporcionalmente, e vice versa, obtendo-se um valor constante para $L(\epsilon)$. Analogamente, para 2 e 3 dimensões, uma superfície ou um volume, respectivamente, teríamos dimensões topológicas 2 e 3.

Se a linha a ser medida é tortuosa, a equação exponencial (1) permanece válida, exceto que $L(\epsilon)$ não é constante para qualquer ϵ . Para tais situações demonstra-se que:

$$F = N \epsilon^D = \text{constante} \quad (2)$$

Por analogia com a equação 1, F é a medida do comprimento da linha e D é a dimensão que produz um valor constante para F , independentemente da escala de medida ϵ escolhida. Essa dimensão D é denominada dimensão fractal da linha e reflete o grau de tortuosidade da mesma. Um valor de D igual a 1, coincidente com a dimensão topológica da linha reta, significa que o seu comprimento é constante, independente da escala de observação, tratando-se portanto de uma linha sem irregularidades em qualquer escala de observação.

Combinando-se as equações (1) e (2), temos:

$$L(\epsilon) = F \epsilon^{1-D} \quad (3)$$

que equivale a: $L(\epsilon) = (F \epsilon^{-D}) \epsilon^1$, ou seja, são necessárias $F \epsilon^{-D}$ unidades de medida ϵ para cobrir

o comprimento da linha. Se a dimensão fractal D é maior que 1 (linha tortuosa) uma diminuição da escala ϵ representa um aumento do produto $F \epsilon^{-D}$ mais que proporcional à diminuição de ϵ , fazendo com que $L(\epsilon)$ aumente.

MANDELBROT (1983) sugere que a e a sua dimensão topológica (D_t) seja designada por incremento fractal (D_i). No caso de uma dimensão o incremento fractal seria $D_i = D_1 - 1$; para duas dimensões seria $D_i = D_2 - 2$ e para tres dimensões seria $D_i = D_3 - 3$; onde D_1 , D_2 e D_3 são as dimensões fractais do objeto para uma, duas ou tres dimensões, respectivamente. Assim, o incremento fractal D_i de um objeto, determinado em tres dimensões, aplica-se igualmente a qualquer plano ou qualquer transeção do objeto.

Aplicações em Física do Solo

Para uma melhor visualização dos conceitos básicos anteriormente apresentados, e já aplicados ao solo, analisemos a figura 1 (TYLER e WHEATCRAFT, 1989) que tenta simular partículas do solo delineando a parede de um tubo capilar.

Se ampliarmos qualquer porção da figura 1 veremos partículas cada vez menores delineando as paredes do poro. A figura 1a mostra o comprimento L do poro sendo medido através de um compasso cuja abertura é ϵ_1 , e na figura 1b através de um compasso cuja abertura é ϵ_2 , menor que ϵ_1 . O comprimento L_1 será dado por $N_1 \epsilon_1$ e o comprimento L_2 será dado por $N_2 \epsilon_2$ e percebe-se facilmente que L_2 será maior que L_1 pois com a abertura menor do compasso ϵ_2 pode-se acompanhar melhor as irregularidades ao longo da figura.

ARYA e PARIS (1981), ao tentarem estabelecer uma relação entre tamanho de partículas do solo em uma dada classe textural e o tamanho dos respectivos poros, estimam o comprimento desses poros através da seguinte relação:

$$L_i = 2R_i N_i^\alpha \quad (4)$$

onde $2R_i$ é o diâmetro das partículas na classe textural i , N_i é o número de partículas na mesma classe i , e α é um fator que leva em conta a não esfericidade das partículas.

Utilizando-se os conceitos de geometria fractal, TYLER e WHEATCRAFT (1989) avaliam o "comprimento verdadeiro" do tubo capilar (L_i^*), delineado por partículas de diferentes tamanhos, tal como o representado pela figura 1, como uma função da escala de medida (eq.3), da seguinte forma:

$$L_i^* = F (2R_i)^{1-D} \quad (5)$$

onde $\epsilon = 2R_i$ é a escala de medida.

A constante F é avaliada pela equação 2, fazendo $L_i^* = 2R_i$, neste caso $N_i = 1$, e:

$$F = L_i^D \quad (6)$$

Substituindo 6 em 5, tem-se:

$$L_i^* = L_i^D (2R_i)^{1-D} \quad (7)$$

Como o comprimento topológico L_i é dado por $2R_i N_i$, a equação 7 fica:

$$L_i^* = 2R_i N_i^D \quad (8)$$

Comparando-se a equação 8 com a equação 4, verifica-se que o fator empírico α de ARYA & PARIS (1981) nada mais é que a dimensão fractal do tubo capilar.

O volume de partículas e o volume de vazios para cada classe de tamanho de partículas do solo podem ser estimados respectivamente pelas seguintes expressões:

$$V_{p_i} = 4/3 N_i \pi R_i^3 \quad (9)$$

$$V_{v_i} = \pi r_i^2 L_i \quad (10)$$

onde R_i é o raio das partículas na classe i e r_i é o raio correspondente de poros.

As relações 8, 9 e 10 permitem a transformação da equação de Laplace numa forma que relaciona o potencial mátrico da água no solo ψ_i com o raio de partícula R_i de cada classe textural i , ficando da seguinte forma:

$$\psi_i = \frac{2 \sigma \cos \beta}{\rho g R_i} \left[\frac{2}{3} \epsilon N_i^{1-D} \right]^{-1/2} \quad (11)$$

onde σ é a tensão superficial da água; β é o ângulo de contato entre a água e a parede do capilar; ρ é a densidade da água;

g é a aceleração da gravidade;

ϵ é a razão de vazios ("void ratio") da amostra de solo = volume de vazios/volume de partículas.

Os valores de Θ_i correspondentes à ψ_i são determinados acumulando-se o volume de vazios da menor classe de partículas até a classe i . Dessa forma é possível estimar uma curva de retenção para o solo conhecendo-se apenas a sua composição granulométrica. O padrão de distribuição de partículas por tamanho é caracterizado pela dimensão fractal da distribuição a qual reflete a dimensão fractal dos poros ou a tortuosidade dos poros.

TURCOTTE, (1986), e TYLER e WHEATCRAFT, 1989, observaram uma relação semelhante à da equação 8, tomando-se no lugar da medida de comprimento L_i^* , o número de partículas N maiores que um dado raio R_i obtidos em uma análise granulométrica:

$$N = K R_i^D \quad (12)$$

onde K é uma constante e D é a dimensão fractal da distribuição granulométrica do solo. Uma vez que a composição granulométrica representa uma coleção tridimensional de partículas, a dimensão D na equação 12 corresponde a dimensão fractal tridimensional D_3 , cujo incremento fractal é $D_1 = D_3 - 3$.

Aplicando-se logaritmo à equação 12 verifica-se que a dimensão fractal pode ser avaliada através do coeficiente angular da reta que relaciona log N (=Y) com log R (=X):

$$\log N = \log K + D \log R \quad (13)$$

Um valor de $D = 0$ representa uma distribuição de partículas composta de uma única classe. Valores de D maiores que 3 refletem uma distribuição composta por partículas de vários tamanhos, dominada numericamente por pequenas partículas.

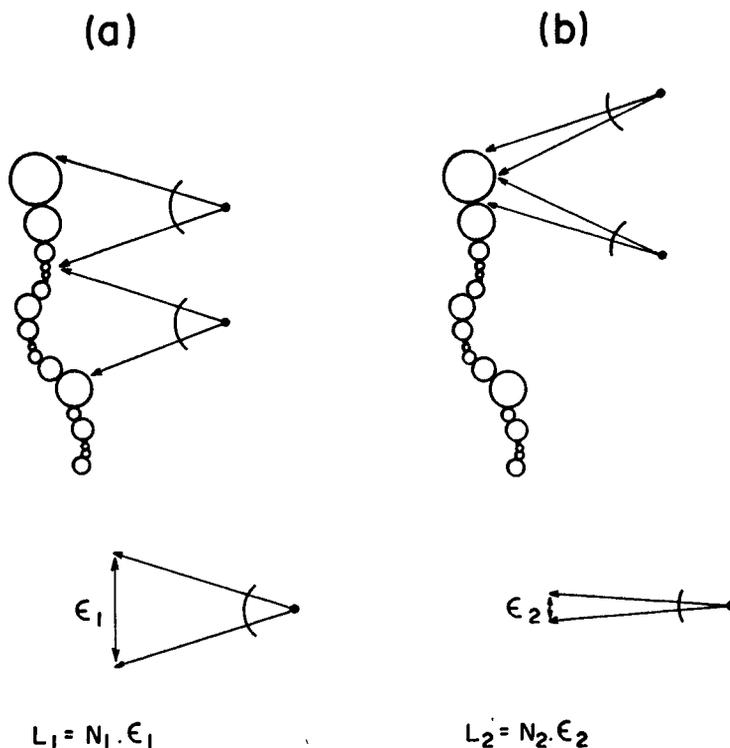


Figura 1. Representação de um tubo capilar delineado por partículas de solo de diferentes tamanhos; a) comprimento L_1 sendo estimado por uma escala ϵ_1 ; b) comprimento L_2 sendo estimado por uma escala $\epsilon_2 < \epsilon_1$. (Adaptado de Tyler e Wheatcraft, 1989).

Valores de D entre 0 e 3 correspondem a distribuições com predominância numérica de partículas de tamanhos maiores. TYLER e WHEATCRAFT (1989) encontraram boa concordância de resultados entre curvas de retenção estimadas pela dimensão fractal da distribuição de partículas e as determinadas em laboratório, principalmente para solos cujo valor de D é maior que 3.

Outra análise da retenção de água em solos utilizando-se conceitos da geometria fractal é feita por TYLER e WHEATCRAFT (1990). Aplicando um modelo fractal tridimensional já conhecido, denominado "Sierpinski carpet", para simular a estrutura de um solo, os autores demonstram que os parâmetros de ajuste λ e b das equações de curva de retenção de BROOKS e COREY (1964) e CAMPBELL (1974), respectivamente, estão relacionados à dimensão

fractal do modelo teórico. Da mesma forma, se aplicarmos os mesmos conceitos na análise das equações de GENUCHTEN (1980) para curva de retenção e condutividade hidráulica, verificaremos que o parâmetro de ajuste n das referidas equações relaciona-se também à dimensão fractal do modelo teórico, ou seja, é o parâmetro da equação que relaciona-se à textura do solo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARYA, L.M.; J.F. PARIS. A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Science Society of America Journal*, v.45, p.1023-1030, 1981.
- BROOKS, R.H.; A.T. COREY. Hydraulic properties of porous media. *Hydrol.Pap. 3*, Colorado State Univ., Fort Collins, 1964.

- CAMPBELL, G.S. A simple method for determining unsaturated hydraulic conductivity from moisture retention data. *Soil Science*. v.117, p.311-314, 1974.
- GENUCHTEN, M.Th. van. Calculating the unsaturated hydraulic conductivity with a new closed-form model. Research Report 78-WR-08, Dept. of Civil Eng., Princeton, New Jersey, 63 p, 1978.
- GENUCHTEN, M.Th. van. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, v.44, p.892-898, 1980.
- MANDELBROT, B.B. The fractal geometry of nature. W.H.Freeman, San Francisco, 1983.
- MUALEM, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*, Washington, v.12, n.3, p.513-522, 1976.
- TURCOTTE, D.L. Fractals and fragmentation. *Journal of Geophysic Research*, p.91, n.b2, p.1921-1926, 1986.
- TYLER, W.S.; S.W. WHEATCRAFT. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Science Society of America Journal*, v.3, p.987-996, 1989.
- TYLER, W.S.; S.W. WHEATCRAFT. Fractal Processes in soil water retention. *Water Resources Research*, v.26, n.5, p.1047-1054, 1990.
-
- Trabalho enviado para publicação em 20.08.92
Trabalho aceito para publicação em 12.05.93