

Evaluation of a proposed model for concrete at mesoscopic scale

Avaliação de uma proposta de modelagem do concreto na meso-escala

D. C. BORGES^a
danniloc@gmail.com

W. M. G. QUARESMA^a
wanessa.m.godoi@gmail.com

G. R. FERNANDES^b
gabrielar.fernandes@ufg.br

J. J. C. PITUBA^b
julio_pituba@ufg.br

Abstract

This work deals with numerical modeling of mechanical behavior in quasi-brittle materials, such as concrete. For this propose, a two-dimensional meso-scale model based on RVE existence is presented. The material is considered as a three-phase material consisting of interface zone (ITZ), matrix and inclusions – each constituent modeled by an independent constitutive model. The Representative Volume Element (RVE) consists of inclusions idealized as circular shapes symmetrically and non-symmetrically placed into the specimen. The interface zone is modeled by means of cohesive contact finite elements. The inclusion is modeled as linear elastic and matrix region is considered as elastoplastic material. Our main goal here is to show a computational homogenization-based approach as an alternative to complex macroscopic constitutive models for the mechanical behavior of the brittle materials using a finite element procedure within a purely kinematical multi-scale framework. Besides, the fundamental importance of the representing dissipative phenomena in the interface zone to model the complex microstructural responses of materials like concrete is focused in this work. A set of numerical examples, involving the microcracking processes, is provided in order to illustrate the performance of the proposed modeling.

Keywords: homogenization, quasi-brittle materials, cohesive contact finite element, concrete, plasticity.

Resumo

Este trabalho trata da modelagem numérica do comportamento mecânico em materiais quase-frágeis, tal como o concreto. Para este fim, um modelo 2D de escala mesoscópica baseado no conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR) é apresentado. O material é considerado como composto por três fases consistindo de zona de interface, matriz e inclusões, onde cada constituinte é modelado independentemente. O EVR consiste de inclusões idealizadas como de forma circular dispostas de maneira simétrica e não simétrica. A zona de interface é modelada por meio de elementos finitos coesivos de contato. A inclusão é modelada como sendo um material elástico linear, já a matriz é considerada como material elastoplástico. Nosso principal objetivo é mostrar que uma formulação baseada na homogeneização computacional é uma alternativa aos modelos constitutivos macroscópicos complexos para o comportamento mecânico de matérias frágeis usando um procedimento baseado no Método dos Elementos Finitos no âmbito de uma teoria multi-escala. Além disso, o trabalho foca na fundamental importância em representar os fenômenos dissipativos na Zona de Transição para obter uma resposta microestrutural de um material complexo como o concreto. Uma série de exemplos envolvendo processos de microfissuração é apresentada de modo a ilustrar o desempenho da modelagem proposta.

Palavras-chave: homogeneização, materiais quase-frágeis, elemento finito coesivo, concreto, plasticidade

^a Federal University of Goiás, Civil Engineering School, Goiânia, GO, Brasil;

^b Federal University of Goiás, Engineering School, Department of Civil Engineering, Laboratory of Computational Modeling, Catalão, GO, Brasil.

1. Introdução

Atualmente, a engenharia tem usado diversos materiais compósitos, em especial com aplicações estruturais. Os materiais compósitos, por definição são formados pela combinação de dois ou mais materiais que apresentam comportamentos físicos distintos e tem seu uso já consolidado, desde a criação de novos materiais quanto no aperfeiçoamento de materiais já existentes. Um dos materiais mais importantes e também utilizados no mundo que pertencente a esse grupo é o concreto.

Contudo, em geral, é bastante difícil de encontrar uma lei constitutiva que reproduza o comportamento do concreto em função de um tipo qualquer de solicitação devido à sua complexidade de comportamento, por se tratar de um material compósito, Pituba e Fernandes [1], Brancherie e Ibrahimbegovic [2], Zhu et al. [3] e outros. Inicialmente, as chamadas teorias constitutivas fenomenológicas foram capazes de responder à demanda de modelagem dos materiais de forma satisfatória. Dentro desse contexto, merece destaque modelos baseados na Mecânica do Dano no Contínuo, cuja aplicação de modelos sofisticados para simular o comportamento de materiais heterogêneos, como o concreto, apresentam bons resultados, Pituba et al. [4], Pituba e Pereira Jr [5], Pituba [6]. Porém, essas teorias vêm alcançando seu esgotamento na captura de fenômenos dissipativos complexos exigindo cada vez mais um esforço de formulação e de identificação de parâmetros cada vez maior. Contudo, nas últimas décadas, teorias baseadas na referência em várias escalas de observação vêm ganhando força no meio científico, onde a resposta constitutiva do material é obtida a partir da análise em diferentes comprimentos e/ou tempo. Logo, é possível ter uma integração do comportamento que acontece numa pequena escala até o nível macroscópico, obtendo assim, uma resposta mais precisa do comportamento do meio, Péric et al. [7] e Miehe e Koch [8]. Dentro desse contexto, alguns trabalhos foram desenvolvidos com foco na modelagem do comportamento mecânico do concreto (Gitman [9], Wriggers and Moftah [10] e López et al. [11])

Em breves palavras, a resposta elástica macroscópica é estimada por meio de uma teoria constitutiva multi-escala baseada na técnica de homogeneização para o problema de elasticidade, onde os tensores tensão e deformação macroscópicos em cada ponto do macro contínuo estão definidos como as médias volumétricas das contrapartes microscópicas sobre o EVR (elemento de Volume representativo) do material associado com aquele ponto. Assim, a resposta elástica efetiva estimada para uma determinada microestrutura depende da escolha das restrições cinemáticas impostas sobre os campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis no EVR.

Uma das principais vantagens da abordagem Multiescala é que os fenômenos físicos podem ser melhor avaliados. Observado numa escala menor, é possível considerar as características de cada material constituinte do material heterogêneo, imperfeições, vazios, e assim, transportando essas informações para uma escala maior de observação. Analisado em nível macro, o concreto comporta-se como um material contínuo. Mas, a sua microestrutura é composta por vários materiais, apresentando comportamentos distintos entre si.

Os fenômenos abordados por teorias convencionais, na realidade é um reflexo macroscópico do que acontece na sua microestrutur

tura. Dado a esse motivo, a análise de materiais heterogêneos, especialmente o concreto, observando sua microestrutura e utilizando uma abordagem Multiescala possibilita a formulação de modelos constitutivos eficientes, ou seja, utilização de modelos constitutivos simples na microestrutura que possibilitem a reprodução de fenômenos complexos observados na macroestrutura, Pituba e Souza Neto [12].

Este trabalho limita-se ao estudo do comportamento do concreto em sua microestrutura de modo a validar qualitativamente a modelagem proposta aqui. Nesse sentido, adota-se uma abordagem com a definição de EVR e técnicas de homogeneização baseada numa formulação multiescala cinematicamente admissível (Fernandes et al. [13] e Fernandes et al. [14]). Aliado a essa formulação, o Método dos Elementos Finitos permite a discretização de um EVR, possibilitando utilizar a Mecânica da Fratura e Teoria da Plasticidade para representar os fenômenos dissipativos na zona de interface e na matriz levando em conta variáveis como as geometrias dos materiais constituintes e suas propriedades. A modelagem proposta pode ser vista como uma alternativa aos modelos constitutivos fenomenológicos complexos para o comportamento de materiais heterogêneos quase-frágeis. Vale ainda ressaltar que no contexto de uma análise multi-escala, a proposta de modelagem da microestrutura do material apresentada aqui é um importante passo inicial para se fazer uma análise totalmente acoplada em varias escalas.

Em suma, no item 2, este artigo apresenta uma breve descrição da modelagem proposta para o concreto englobando o processo de homogeneização e os modelos constitutivos baseados na Mecânica da Fratura e Contato utilizado em conjunto com um elemento de fratura e contato desenvolvido para a modelagem da zona de transição, além do modelo de Mohr-Coulomb implementado no âmbito da modelagem 2D da matriz cimentícia considerando estado plano de tensão. No item 3 são apresentados alguns resultados obtidos de modo a demonstrar as potencialidades e limitações da modelagem proposta. Por fim, algumas considerações são descritas no item 4.

2. Modelagem proposta para o concreto

A formulação empregada neste trabalho descreve o comportamento de um ponto qualquer do macrocontínuo (pode ser um ponto de integração de um elemento finito da macroestrutura, por exemplo). Esse ponto, ao ser excitado por um campo de deformações advinda da análise da macroestrutura, necessita voltar como resposta um estado de tensão e propriedades constitutivas atualizadas. Isso é realizado com o emprego do conceito de EVR, onde as dimensões não são importantes e sim, a distribuição e proporcionalidade entre seus constituintes. Esse EVR, ao ser excitado pelo estado de deformação macroscópica apresenta respostas em termos de tensão e tensor constitutivo dependendo das condições de contorno do modelo multi-escala empregado, além de utilizar conceitos de média volumétrica e de equivalência de energia entre o macro e micro. Em suma, os resultados apresentados são de EVRs excitados por um estado de deformação macroscópica dentro de uma análise multi-escala, porém neste trabalho, a formulação é empregada de maneira desacoplada, onde o interesse é no EVR.

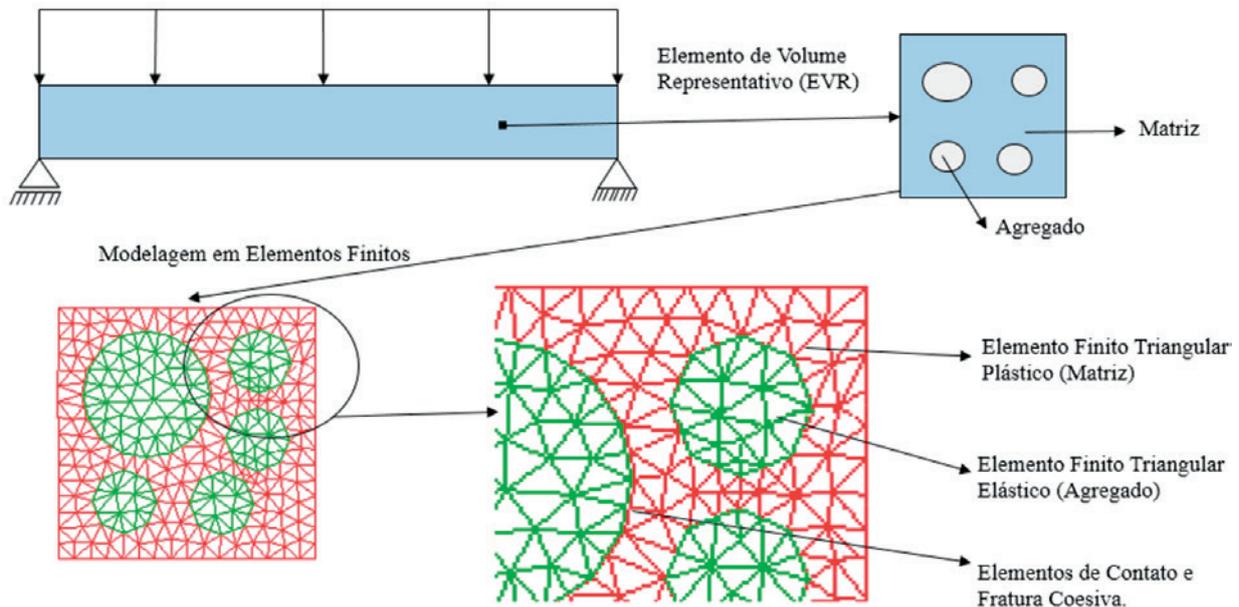


Figura 1
Esquema da análise multi-escala

Portanto, para simular o comportamento mecânico do concreto, a meso-escala é estudada através da definição de um EVR, onde sua discretização em elementos finitos é dada na Figura 1. Os agregados são considerados de forma aproximadamente circular contendo elementos finitos triangulares elásticos. Já a matriz do compósito é considerada como um meio elastoplástico seguindo a evolução dada pelo modelo de Mohr-Coulomb. A Zona de transição ou zona de interface é discretizada por elementos finitos de fratura coesiva de modo a simular a abertura e/ou fechamento de fraturas naquela região, onde a mesma é a responsável pelo principais fenômenos dissipativos durante o processo de fraturamento na microestrutura do concreto. Portanto, neste trabalho, procura-se simular o comportamento micromecânico de concretos ditos convencionais.

2.1 Formulação do modelo na meso-escala

O EVR é descrito como contínuo de modo que o conceito de tensão permaneça válido na microescala. Considerando um tensor de deformação $\epsilon(x,t)$, bem como $\sigma(x,t)$ tensor de tensão em um ponto x da macroestrutura, são obtidos como a média volumétrica de todos os pontos y do EVR sobre o respectivo campo microscópico $\epsilon_\mu = \epsilon_\mu(y,t)$ ou $\sigma_\mu = \sigma_\mu(y,t)$ através de um EVR associado a x . Isto em um instante t arbitrário, temos então:

$$\epsilon(x,t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \epsilon_\mu(y,t) dV \tag{1}$$

$$\sigma(x,t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(y,t) dV \tag{2}$$

As Equações (1) e (2) apresentam a deformação macroscópica ou homogeneizada e a tensão macroscópica ou homogeneizada, processo resultante da transformação de uma quantidade micros-

cópica em uma quantidade macroscópica por meio de um processo de homogeneização. Além disso, os campos podem ser escritos em relação à tensão microscópica a seguir:

$$\sigma_\mu(y,t) = f_y(\epsilon_\mu(y,t)) \tag{3}$$

Sendo f_y o funcional constitutivo, definido neste trabalho pelo modelo de Mohr-Coulomb. Além disso, a deformação microscópica ϵ_μ pode ser escrita em termos de campo de deslocamento microscópico u_μ do EVR conforme a seguir:

$$\epsilon_\mu(y,t) = \nabla^S u_\mu(y,t) \tag{4}$$

onde o ∇^S é o operador gradiente simétrico do campo de deslocamento u .

Já o campo de deslocamento microscópico u_μ , sem perda de generalidade, é composto pelas seguintes contribuições:

$$u_\mu(y,t) = u(x,t) + \overline{u}_\mu(y,t) + \tilde{u}_\mu(y,t) \tag{5}$$

sendo a primeira parcela um deslocamento constante de corpo rígido coincidente com o deslocamento macroscópico $u(x,t)$ associado ao ponto x , a segunda parcela varia linearmente com a coordenada y e é obtida a partir do campo de deformação macroscópica ϵ como definido a seguir:

$$\overline{u}_\mu(y,t) = \epsilon(x,t)y \tag{6}$$

e a terceira parcela é definida como campo de flutuação de deslocamento $\tilde{u}_\mu(y,t)$. Reescrevendo de forma simplificada a relação acima detalhada:

$$u_\mu(y,t) = \epsilon(x,t)y + \tilde{u}_\mu(y,t) \tag{7}$$

Na Equação (7) a parte ϵy varia linearmente em y e isto resulta na multiplicação macroscópica de deformação ϵ do EVR, que é constante para as coordenadas do ponto y . No caso de deslocamento microscópico uniforme ϵ_μ , a flutuação de deslocamentos

\tilde{u}_μ é nula. Também no EVR são satisfeitas as seguintes relações para deformação microscópica ε_μ e flutuação de deformação microscópica $\tilde{\varepsilon}_\mu$:

$$\varepsilon_\mu = \nabla^S u_\mu(y, t) \tag{8}$$

$$\tilde{\varepsilon}_\mu = \nabla^S \tilde{u}_\mu(y, t) \tag{9}$$

Considerando a Equação (7) e as relações acima, de forma análoga, a deformação microscópica pode ser escrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_\mu(y, t) = \varepsilon(x, t) + \tilde{\varepsilon}_\mu(y, t) \tag{10}$$

Após algumas manipulações (Fernandes et al. [13]), pode-se reescrever a Equação (10) em forma de velocidade, onde uma velocidade de deformação microscópica é dita cinematicamente admissível se:

$$\dot{\varepsilon}_\mu(y, t) = \nabla^S \dot{u}_\mu = \dot{\varepsilon}(x, t) + \dot{\varepsilon}_\mu(y, t) \quad \forall \dot{u}_\mu \in v_\mu \tag{11}$$

Onde v_μ é o espaço de deslocamentos cinematicamente admissíveis do EVR. Maiores detalhes podem ser encontrados em Fernandes et al. [13].

Como já descrito anteriormente, a microescala é representada pelo EVR e a formulação do MEF é a ferramenta que resolve o problema de equilíbrio do mesmo. As variáveis do EVR, como por exemplo, dimensões e constantes elásticas, são distintas do material no macrocontínuo e essas características são definidas para um EVR padrão e ele será extrapolado para todos os EVRs da estrutura. Assim, a solução de um EVR, ou seja, o cálculo dos deslocamentos, das forças internas, das tensões verdadeiras e da matriz constitutiva atualizada dos seus elementos finitos são obtidos quando se alcança a convergência, de acordo com a tolerância adotada, do seu problema de equilíbrio proposto. No entanto, para resolver esse problema de equilíbrio, necessita-se definir as condições de contorno a ser impostas no EVR. Assim, a resposta obtida pode variar em função da condição de contorno adotada. Desta forma, com objetivo de estruturar e organizar melhor a apresentação da formulação segundo uma abordagem multiescala para este trabalho, consideram-se cinco etapas: Equação de equilíbrio no EVR; Princípio de Hill-Mandel; Homogeneização das tensões; Condições de contorno impostas no EVR; Módulo constitutivo tangente homogeneizado.

Por motivos de simplificação será considerado o domínio das inclusões Ω_μ^i e o da matriz Ω_μ^m como um só domínio dos sólidos Ω_μ^s . Assumindo que as forças de inércia são desprezíveis e que o EVR é submetido a um campo de força de corpo $b = b(y, t)$ e a um campo de forças de superfície $t^e = t^e(y, t)$ atuando em todo o contorno, o princípio dos trabalhos virtuais estabelece que o EVR está em equilíbrio, se é somente se, o campo de tensão σ_μ em Ω_μ satisfaz a equação variacional clássica da elasticidade:

$$\int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu(y, t) : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^s} b(y, t) \cdot \eta dV + \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y, t) : \nabla^S \eta dV - \int_{\Omega_\mu^v} b(y, t) \cdot \eta dV - \int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y, t) \cdot \eta dA = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \tag{12}$$

Os trabalhos de Hill e Mandel (Giusti et al. [15]) estabeleceram o princípio de macro homogeneidade que diz que a potência das tensões macroscópicas em qualquer ponto arbitrário do macro-

contínuo deve ser igual à média volumétrica da potência das tensões microscópicas sobre o EVR associado a esse ponto para qualquer movimento cinematicamente admissível do EVR (Giusti et al. [15]). Considerando a Equação (11) e assumindo $\tilde{u}_\mu = \eta$, além de saber que os vazios estão em equilíbrio, após algumas manipulações (ver em detalhes em Fernandes et al. [13] e Fernandes et al. [14]), conclui-se que o Princípio de Hill-Mandel vale se e somente se as seguintes integrais forem nulas:

$$\int_{\partial\Omega_\mu} t^e(y, t) \cdot \tilde{u}_\mu dA = 0 \quad \forall \tilde{u}_\mu \in v_\mu \tag{13}$$

$$\int_{\partial\Omega_\mu^s} b(y, t) \cdot \tilde{u}_\mu dV = 0 \quad \forall \tilde{u}_\mu \in v_\mu \tag{14}$$

Considerando as Equações (8) e (10) e escrevendo σ_μ como $\sigma_\mu = f_y(\varepsilon_\mu)$, sendo f_y o funcional constitutivo pode-se obter a seguir a equação em termos de flutuação de deslocamentos para o equilíbrio da parte sólida do material:

$$\int_{\Omega_\mu^s} f_y(\varepsilon(x, t) + \nabla^S \tilde{u}_\mu(y, t)) : \nabla^S \eta dV = 0 \quad \forall \eta \in v_\mu \tag{15}$$

E por fim, a formulação é completada com a escolha apropriada do espaço v_μ , ou seja, com a escolha das restrições cinemáticas do EVR. Portanto, o problema de equilíbrio microscópico consiste de dado o tensor de deformação macroscópico ε , o campo $\tilde{u}_\mu \in V_\mu$ de tal modo que de cada instante t , a Equação (15) é satisfeita. Em vista da arbitrariedade de η , após a discretização do domínio do EVR em elementos, cujo domínio discretizado passa a ser referenciado por Ω_μ^h , a seguinte equação incremental de equilíbrio microscópico deve valer para o incremento de carga no tempo $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ e discretização h do domínio que permite encontrar o campo de flutuação de deslocamentos $\tilde{u}_{\mu(n+1)} = \tilde{u}_{\mu(n)} + \Delta \tilde{u}_{\mu(n)}$:

$$G_h^{n+1} = \int_{\Omega_\mu^h} B^T f_y(\varepsilon_{n+1} + B \tilde{u}_{\mu(n+1)}) dV = 0 \tag{16}$$

Onde B é a matriz global de deformação-deslocamento, Ω_μ^h indica o domínio discretizado do EVR. Se o incremento de carga n é não-linear, a Equação (16) é resolvida pela aplicação do método de Newton-Raphson que consiste em buscar a correção de flutuação $\delta \tilde{u}_\mu^{i+1}$ para interação $i+1$, tal que:

$$F^i + K^i \delta \tilde{u}_\mu^{i+1} = 0 \tag{17}$$

Onde F é o vetor de forças e K é a matriz de rigidez tangente do EVR. Depois de computar as correções $\delta \tilde{u}_\mu^{i+1}$ da Equação (17), o próximo passo é o cálculo do campo de flutuação de deslocamentos a ser considerando na interação $i+1$ do microcontínuo, que é dado por: $\tilde{u}_\mu^{i+1} = \tilde{u}_\mu^i + \delta$.

Já a tensão homogeneizada é calculada pela Equação (2), considerando que o EVR é composto por partes vazias e sólidas (matriz e agregados) $\Omega_\mu = \Omega_\mu^s \cup \Omega_\mu^v$, e resulta em:

$$\sigma = \sigma(x, t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \sigma_\mu(y, t) dV + \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^v} \sigma_\mu(y, t) dV \tag{18}$$

A complementação da formulação sobre equilíbrio do EVR descrita é realizada com a escolha do espaço de deslocamentos, ou

seja, com a escolha das restrições cinemáticas a ser imposta no EVR que leva a diferentes classes de modelos multiescala e consequentemente diferentes resultados numéricos (Peric et al. [7]). Aqui é utilizada a condição de flutuação periódica, onde para cada lado Γ_i^+ do EVR, do qual a direção normal é n_i^+ , deve corresponder a um lado igual Γ_i^- com direção normal n_i^- , sendo $n_i^+ = -n_i^-$. Similarmente, para cada ponto y^+ definido sobre Γ_i^+ deve existir um ponto y^- sobre o lado Γ_i^- . Para que a flutuação do deslocamento seja periódica no contorno do EVR, para cada par (y^+, y^-) dos pontos deve-se ter:

$$\tilde{u}_\mu(y^+, t) = \tilde{u}_\mu(y^-, t) \quad \forall \{y^+, y^-\} \in \partial\Omega_\mu \tag{19}$$

2.2 Modelo de fratura coesiva e plasticidade

Pituba et al. [12] propôs um modelo de fratura coesiva modificado a partir de Cirak et al. [16] para lidar com meios dúcteis de modo a simular o processo de fissuração até a falha da microestrutura. De maneira geral, foi desenvolvido para representar o comportamento das fissuras quando são capazes de transmitir cargas entre suas superfícies, que gradualmente decresce até não ter mais transmissão de tensões entre elas. O modelo proposto descreve a lei coesiva de deformação-finita irreversível. A energia coesiva liberada ϕ é dada por:

$$\Phi = \Phi(\delta_n, \delta_s, q) \tag{20}$$

Onde, δ_n é a abertura devido ao modo I (normal); δ_s é a abertura devido ao modo II (escorregamento) e q é a variável que descreve os processos inelásticos da coesão.

É possível assumir que a deformação devida a abertura por escorregamento é um valor escalar independente da direção de sua fissura na superfície, assim $\delta_s = |\delta_s|$, dando um caráter isotrópico para seu comportamento. Para a formulação da lei coesiva dos modos mistos, é introduzido um deslocamento de abertura efetiva dado por:

$$\delta = \sqrt{\beta^2 \delta_s^2 + \delta_n^2} \tag{21}$$

O parâmetro β assume valores diferentes para as aberturas, variando de 0 a 1, sendo um parâmetro que quantifica a razão entre os processos de abertura de fratura devido ao escorregamento e à separação normal. Por outro lado, assumindo que a energia potencial liberada ϕ depende de δ , a lei coesiva é escrita como:

$$t = \frac{t}{\delta} (\beta^2 \delta_s + \delta_n n) \tag{22}$$

Onde, n é o vetor normal à fissura; δ_s é o vetor de abertura por escorregamento localizado na superfície da fissura; t é vetor de tensão coesiva ao longo da fissura; t é a tensão efetiva escalar. Por outro lado, a energia coesiva liberada na microestrutura do material proposta neste trabalho (Equação (20)) é dada pela expressão:

$$\Phi = e \sigma_c \delta_c \left[1 - e^{-\left(1 + \frac{\delta}{\delta_c}\right)} \right] \tag{23}$$

Onde a lei de tensão efetiva coesiva para o caso de carregamento é obtida da Equação (25), como sendo:

$$t = \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} = \sigma_c e^{-\delta/\delta_c} \text{ se } \delta = \delta_{max} \text{ e } \dot{\delta} \geq 0 \tag{24}$$

Já a relação proposta para a tensão efetiva escalar no caso de descarregamento é proposta admitindo-se um caso elástico, ou seja, sem deslocamento de abertura efetiva residual (Equação (25)), sendo descrita a seguir:

$$t = \frac{t_{max}}{\delta_{max}} \delta \text{ se } \delta < \delta_{max} \text{ ou } \dot{\delta} < 0 \tag{25}$$

Onde e é o exponencial, σ_c é um parâmetro do modelo que reflete a máxima tensão de tração normal coesiva, δ é a velocidade de abertura, δ_{max} é a máxima abertura efetiva até o instante da análise, t_{max} é a máxima tensão efetiva até o instante da análise e δ_c é um parâmetro do modelo que indica uma abertura crítica. A lei

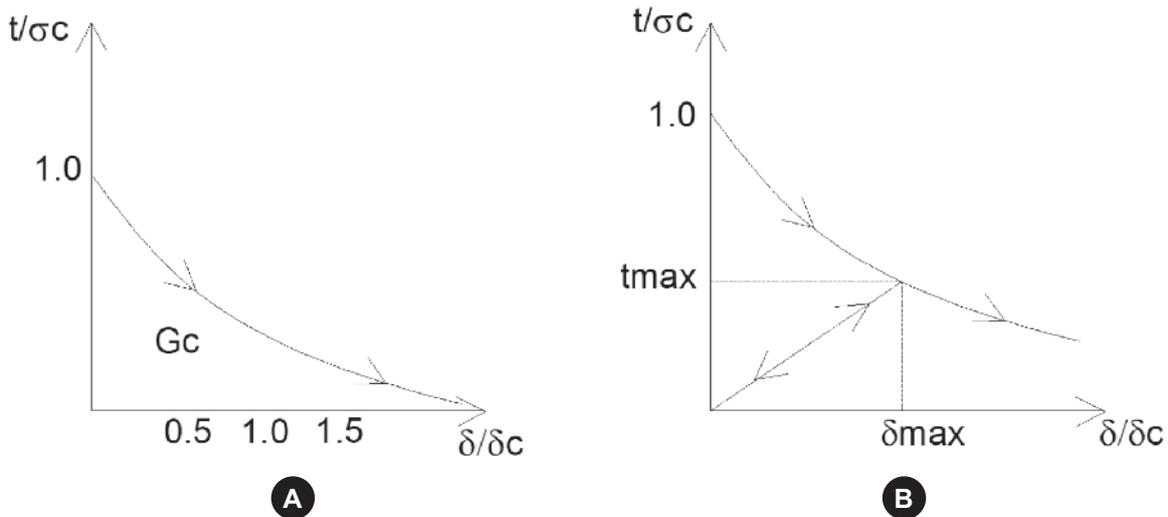


Figura 2 Lei Coesiva proposta escrita em termos de tensão efetiva versus deslocamento de abertura efetiva: a) Caso de carregamento; b) Caso de descarregamento

coesiva tensão efetiva versus deslocamento de abertura efetiva está ilustrada abaixo para o caso de carregamento (Figura 2a) e descarregamento (Figura 2b).

Segundo Ortiz e Pandolfi [17], há uma relação entre a taxa liberada de energia crítica (G_c) para a propagação de fratura, em nosso caso, na microestrutura do material, e a lei coesiva. Adotando-se a direção 1 como sendo aquele no plano da fratura e na direção de propagação da mesma, pode-se admitir que G_c é dado por:

$$G_c = \int_0^R t \cdot \delta_{,1} dx_1 \quad (26)$$

Onde R é a o comprimento da zona coesiva. A Equação (26) pode ainda ser entendida como:

$$G_c = \int_0^{\infty} t \cdot \delta_{,1} dx_1 = \phi_{\infty} \quad (27)$$

Para o caso da Equação (24), temos que a taxa liberada de energia crítica é expressa como:

$$G_c = e\sigma_c\delta_c \quad (28)$$

Obviamente que a energia de fratura das modelagens convencionais, aquelas realizadas com modelos constitutivos fenomenológicos, trata da fratura no macrocontínuo como um meio homogeneizado. No presente trabalho, o conceito de energia de fratura está intimamente ligado ao que ocorre na zona de transição na mesoescala do material, que ao se propagar e unir com outras microfissuras podem vir a gerar um processo de localização, o que leva à formação de uma fratura no macrocontínuo. Esse processo leva a uma relação entre as energias de fratura no macrocontínuo (material homogeneizado) e na mesoescala do material, como abordado em Oliver et al. [18].

Antes do aparecimento das fraturas, uma rigidez entre as bordas da possível fratura presente entre os elementos finitos triangulares é chamada de fator de penalidade (λ_p). Este fator de penalidade é um parâmetro de valor escalar. Na prática, valores altos para o fator de penalidade são adotados a fim de obter uma aproximação precisa. Tal procedimento garante que a possível fratura permaneça fechada até se atingir o critério de separação

e, ao mesmo tempo, garante a admissibilidade física de todo o processo. O fator de penalidade é, portanto, uma rigidez imposta ao fechamento da fissura.

De maneira geral, esta estratégia pretende criar rigidez nos nós dos pares com o contato de elementos finitos coesivos, a fim de não permitir a penetração das superfícies de fissura. Por outro lado, no regime de tensão, este fator de penalidade efetivamente substitui a porção rígida inicial da lei coesiva por uma resposta linear rígida na forma da Equação (25). Para detectar o fenômeno de contato coesivo, é adotado o conceito das diferenças entre os pontos de Gauss do elemento finito de contato e fratura coesiva.

$$t = \lambda_p \delta \quad \text{se} \quad \lambda_p \delta \leq \sigma_c \quad (29)$$

Os tipos de elementos considerados nesse trabalho são compostos por duas superfícies que são coincidentes na configuração indeformada do EVR. O elemento finito de contato e fratura coesiva é definido como um elemento de quatro nós sendo a sua geometria compatível com a de dois elementos triangulares bidimensionais usados para modelar as fases da matriz e de inclusão. A formulação desenvolvida pode ser encontrada em Pituba e Souza Neto [12] e Pituba et al. [19].

Por outro lado, para lidar com as deformações plásticas que surgem quando a macroestrutura do concreto é solicitada, sobretudo por tensões de compressão, o bem conhecido modelo de Mohr-Coulomb é utilizado aqui na representação do comportamento mecânico da matriz cimentícia. Tal modelo é empregado para capturar as possíveis deformações plásticas que ocorrem na matriz cimentícia sendo, portanto, mais um processo dissipativo a ser modelado na microestrutura do material em conjunto com a possível fissuração que ocorre predominantemente na Zona de Interface. No caso de regime predominante de tração, a modelagem proposta evidencia o processo de fissuração da Zona de Interface, capturado pelo modelo de fratura e contato, como o mais importante fenômeno dissipativo, principalmente fase inicial de carregamento. Obviamente que deve-se pensar num processo de fissuração na matriz cimentícia que ocorre predominantemente em regime de softening da macroestrutura do material, sendo necessária a inserção de elementos de fratura e contato na matriz. Contudo, essa inserção de elementos pode gerar grande

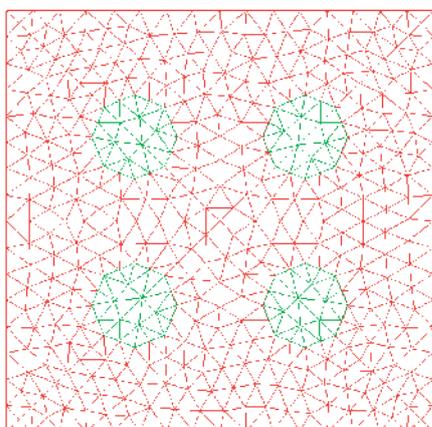


Figura 3
Elemento de volume representativo com 4 inclusões

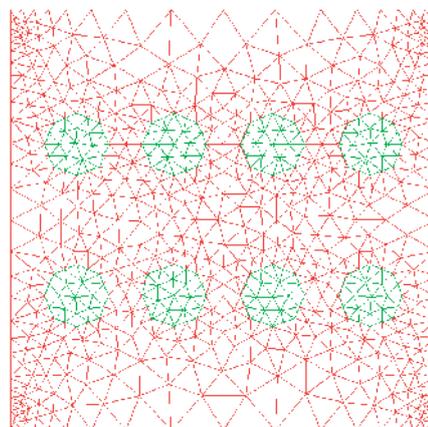


Figura 4
Elemento de volume representativo com 8 inclusões

instabilidade da resposta numérica principalmente em regime de tensão de pico. Por outro lado, em regime predominante de compressão, os processos de plastificação da matriz é entendido aqui como ator principal em conjunto com a fissuração da Zona de Interface.

A modelagem do processo de fissuração da Zona de Interface é de fundamental importância para a captura do colapso da microestrutura do concreto, principalmente em regime predominante de tração. Essa afirmação é comprovada nos resultados obtidos em Pituba e Souza Neto [12] onde, mesmo considerando um comportamento elástico para a matriz, o processamento de fratura da Zona de Interface aliado à geometria dos agregados possibilitou a simulação de deformações plásticas macroscópicas homogeneizadas quando em processo de descarregamento e inversão de sentido de carregamento, evidenciando assim, o efeito unilateral desse material.

O modelo constitutivo de Mohr-Coulomb, assim como o modelo de fratura e contato, foi implementado num código computacional desenvolvido para a análise de EVRs de materiais heterogêneos submetidos a um estado de deformação macroscópico. No início do carregamento, os incrementos das deformações macroscópicas são impostas, sendo as tensões corrigidas pelos modelos constitutivos. No caso do modelo de Mohr-Coulomb, com os valores das tensões, é possível calcular o valor da função de plastificação. Enquanto esse valor for abaixo de zero, o material comporta-se no regime elástico e a superfície de plastificação não é atualizada. Após a função de plastificação atingir um valor positivo, é iniciado um mapeamento para atualizar os valores das tensões e assim, a superfície de plastificação.

Sendo as tensões principais ordenadas, é possível mapear o escoamento plástico para uma das superfícies do espaço. O mapeamento é feito de quatro distintas formas. Maiores detalhes podem ser encontrados em Souza Neto et al. [20].

Por outro lado, as expressões propostas são válidas para os casos em que envolvam o espaço tridimensional. Para o estado plano de

tensões (EPT), Souza Neto et al. [20] propõe uma estratégia para a aproximação ao estado plano de tensões utilizando as equações constitutivas do estado plano de tensões, restringindo as tensões nos pontos de Gauss do elemento finito. Como as tensões σ_{13} e σ_{23} são nulas na formulação, é adicionada na implementação a tensão σ_{33} , em que o valor dela deve ser igual a zero. Considera-se a direção 3 como aquela perpendicular ao plano médio do elemento finito. Porém, ela está relacionada com a deformação ϵ_{33} , que depende das outras tensões no plano do elemento finito.

Assim, dada uma deformação elástica inicial, $(\epsilon_e)_{33}$, aplica-se o algoritmo de integração para o caso axisimétrico de tensões e obtém-se a tensão σ_{33} . Caso a convergência seja atingida ($|\sigma_{33}| \leq \epsilon_{tol}$), a atualização da tensão é válida. Mas, caso a convergência não seja atingida é necessário atualizar o valor da deformação $(\epsilon_e)_{33}$. A correção é feita através do procedimento de Newton-Raphson e o valor da deformação é corrigido de acordo com a matriz tangente consistente, corrigindo assim as tensões principais.

Por fim, vale ressaltar que todo o equacionamento ilustrado nesta seção é resolvido através de uma formulação tangente consistente, o que leva a uma solução numérica com taxa quadrática de convergência, sendo esse um fator positivo, haja vista que em análises multi-escala, o custo computacional tem alto valor.

3. Resultados e discussões

Para verificar a viabilidade de emprego da formulação proposta, são realizadas simulações numéricas baseadas no comportamento da microestrutura do concreto. Inicialmente, foram gerados EVRs que possuem dimensões de $l \times l$ e espessura de $l/10$ com inclusões dispostas numa matriz, evidenciando a distinção de dois materiais nos EVRs, simulando a estrutura bifásica do concreto sob estado plano de tensões. Tal EVR é composto por elementos finitos triangulares e elementos de fratura e contato. Considera-se a matriz como meio elasto-plástico seguindo o critério de plasti-

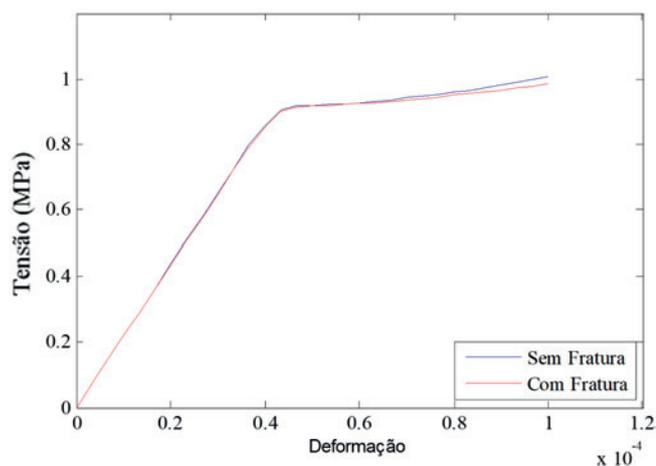


Figura 5
Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformação específica de alongamento macroscópica imposta na direção x do EVR com 4 inclusões

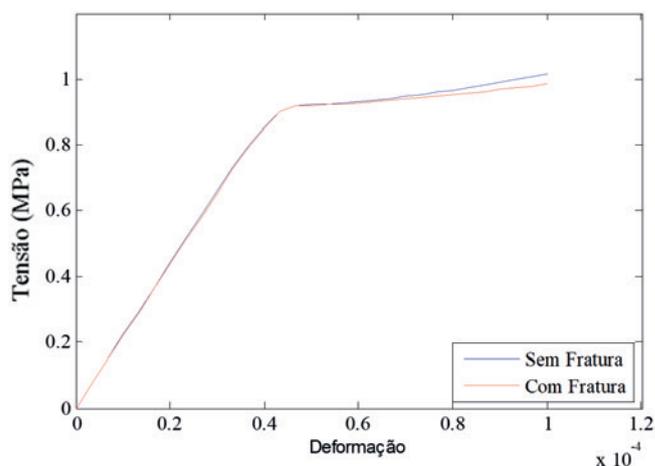


Figura 6
Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformação específica de alongamento macroscópica imposta na direção x (ϵ) do EVR com 8 inclusões

ificação de Mohr-Coulomb com os seguintes parâmetros, Assad et al. [21]: módulo de elasticidade longitudinal igual a 20 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,2, ângulo de fricção e o ângulo de dilatação iguais a $\phi = 5^\circ$ e $\Psi = 10\%$, respectivamente. Já os agregados são considerados como meios elásticos com módulo

de elasticidade igual 35 GPa e o coeficiente de Poisson igual a 0,26, Mehta e Monteiro [22].

Na região de interfase matriz/agregado, nos casos em que foi avaliado o fraturamento, foram inseridos elementos de contato e fratura coesiva. Os parâmetros para esses elementos foram:

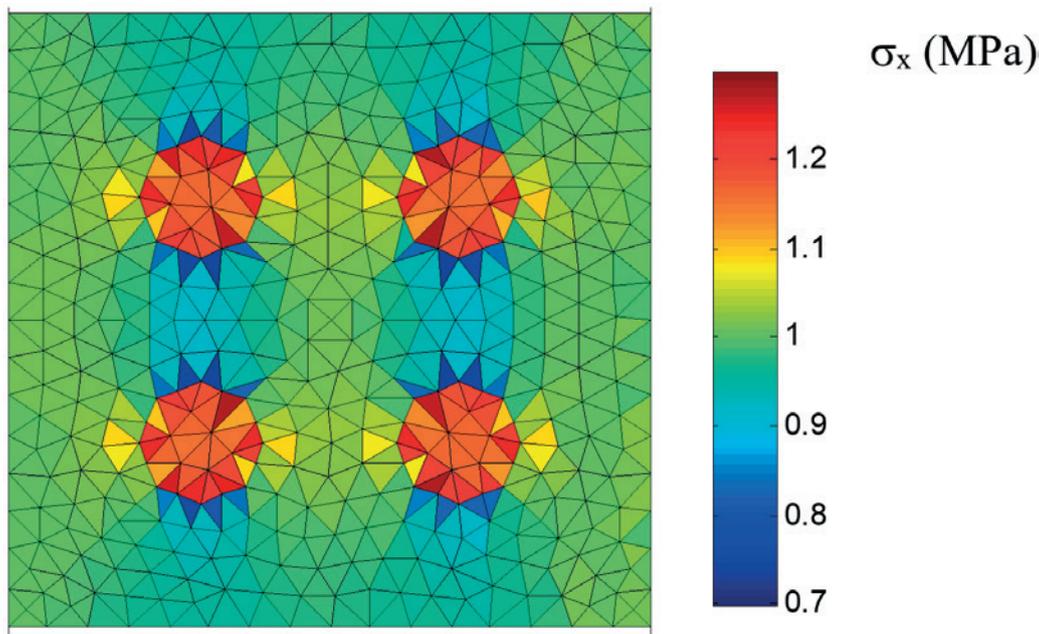


Figura 7

Distribuição de tensão normal na direção x no interior do EVR com 4 inclusões sem a consideração do fraturamento no zona de transição

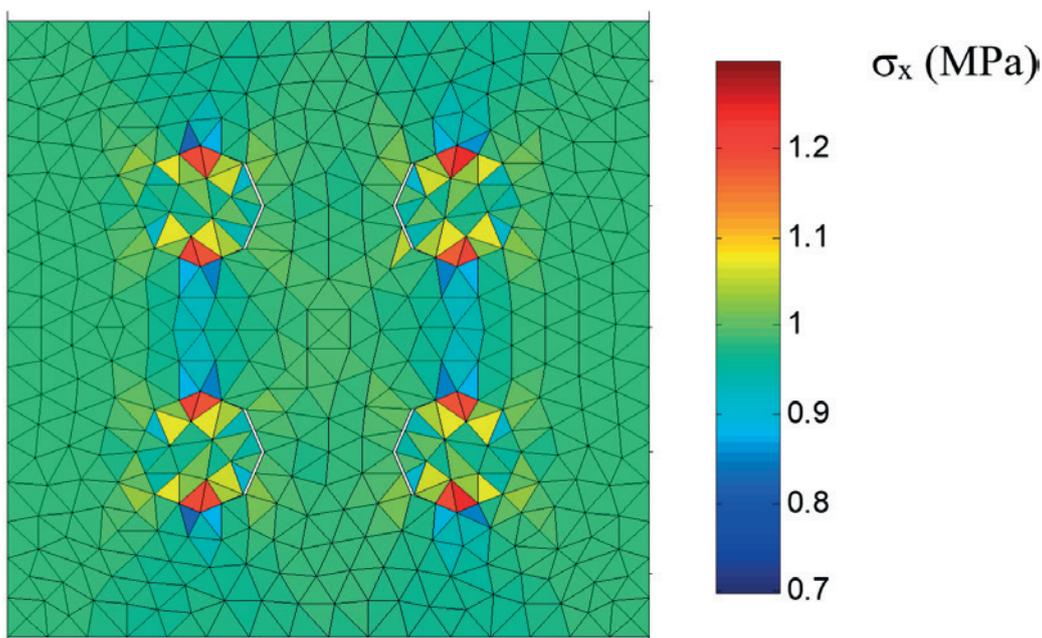


Figura 8

Distribuição de tensão normal na direção x no interior do EVR com 4 inclusões considerando o processo de fraturamento no zona de transição

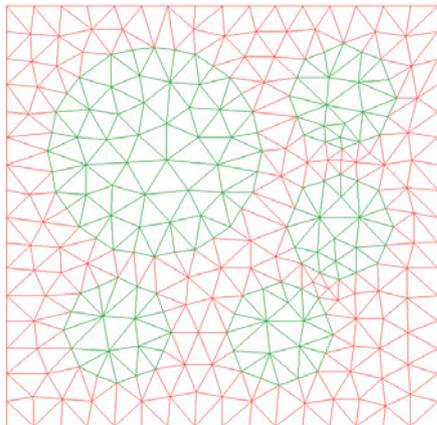


Figura 9
Elemento de volume representativo de Nguyen et al. [23]

$\lambda_p = 200000 \text{ N/mm}^3$, $\beta = 0,7$, $\sigma_c = 0,09 \text{ MPa}$ e $\delta_c = 0,02 \text{ mm}$, Ortiz e Pandolfi [17], Oliver et al. [18], Pituba e Souza Neto [12].

3.1 Influência do fraturamento na zona de transição

Neste item são analisados EVRs com 4 e 8 inclusões de formatos circulares distribuídas na matriz. A Figura 3 apresenta um EVR com 4 inclusões que representam 12% da fração volumétrica, sendo utilizado um total de 798 elementos finitos triangulares e 64 elementos finitos de contato e fratura coesiva quando incluído. Já a Figura 4 apresenta o EVR com 8 inclusões que representam

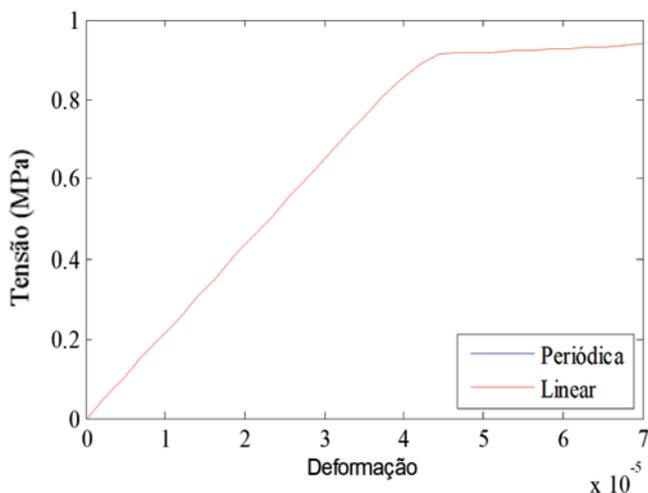


Figura 10
Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformação específica de alongamento macroscópica imposta na direção x (ϵ) do EVR com 4 inclusões considerando diferentes condições de contorno do EVR

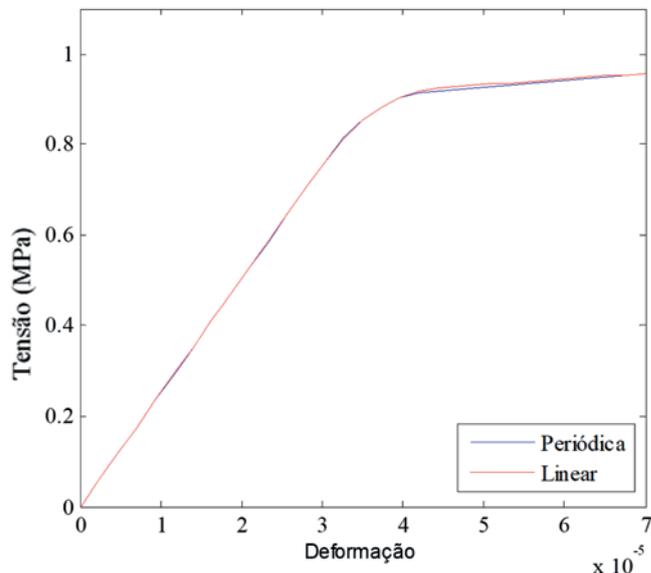


Figura 11
Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformação Específica de alongamento macroscópica imposta na direção x do EVR apresentado em Nguyen et al. [23], considerando diferentes condições de contorno do EVR

14% da fração volumétrica, sendo utilizados 1184 elementos finitos triangulares e 128 elementos finitos de contato e fratura coesiva quando incluído. A interface matriz/agregado foi modelada com elementos de fratura e contato. Em outra análise, perfeita aderência entre agregados e matriz foi considerada.

Os EVRs foram submetidos a uma deformação macroscópica total

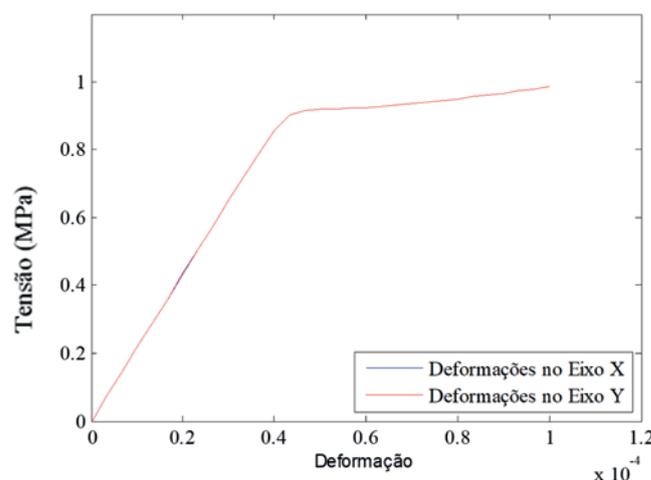


Figura 12
Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformações específicas de alongamento macroscópicas impostas no EVR com 4 inclusões

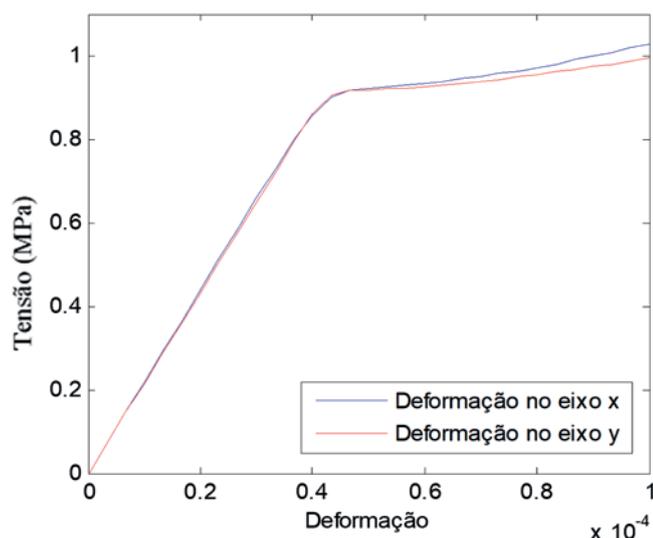


Figura 13

Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformações específicas de alongamento macroscópicas impostas no EVR com 8 inclusões

de $\varepsilon_x = 0,0001$ e $\varepsilon_y = -0,00001$ subdivididas em 20 incrementos. A deformação macroscópica distorcional no plano foi considerada nula. Com as deformações aplicadas, obtêm-se os valores das tensões homogeneizadas para o EVR. Os gráficos das Figuras 5 e 6 relacionam a tensão homogeneizada na direção x com a deformação macroscópica no mesmo eixo. Nota-se que a resposta do carregamento na parte elástica é igual quando se considera fraturamento ou perfeita aderência. Contudo, após os processos

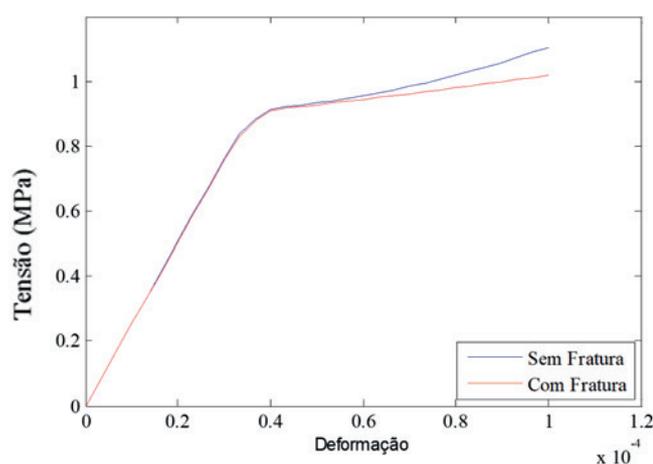


Figura 14

Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformação específica de alongamento macroscópica imposta na direção x (ε) do EVR de Nguyen sob o regime predominante de tração

dissipativos de plasticidade e fraturamento, quando for o caso, as respostas divergem. A consideração do fraturamento na zona de transição evidencia uma importante contribuição no comportamento não-linear do material em sua microestrutura. Assim, o modelo de fratura diminui a rigidez do EVR após atingir a tensão de escoamento. As respostas dos dois EVRs são similares devido ao valor bastante próximo da fração volumétrica de inclusões.

Com o intuito de visualizar a distribuição de tensões na direção x no interior do EVR, observa-se nas Figuras 7 e 8 o impacto de se considerar o processamento de fraturamento na zona de transição. Para o EVR com 4 inclusões sem fratura, a distribuição é mostrada na Figura 7 e o EVR com 4 inclusões e considerando elementos de fratura é mostrada na Figura 8. Na Figura 7 nota-se que a transmissão das tensões são contínuas e impacta os agregados de maneira direta. Assim, os agregados, por apresentar rigidez maior que a pasta de cimento, confere maior rigidez à resposta homogeneizada da Figura 5.

Já na Figura 8, devido aos efeitos dissipativos dos elementos de fratura, as tensões nos agregados são menores por conta da transmissão das tensões nas faces das fraturas. Assim, o impacto que a rigidez dos agregados exerce na resposta homogeneizada é menor, conforme mostrado na Figura 5.

3.2 Influência das condições de contorno da formulação Multiescala

Na formulação Multiescala, a resposta homogeneizada é influenciada pelas condições de contorno conforme o item 2.1. Para essa análise foi sugerido um novo EVR apresentado por Nguyen et al. [23] com a distribuição de agregados de várias dimensões e distribuição aleatória, como mostrado na Figura 9. A utilização desse EVR deve-se a não apresentação de simetria em nenhum eixo. Isso será importante nas análises do item 3.3. Sua fração

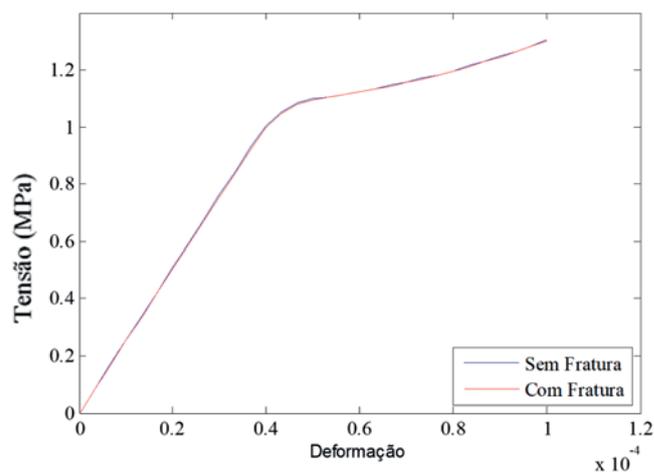


Figura 15

Tensão normal homogeneizada de compressão na direção x versus deformação específica de encurtamento macroscópica imposta na direção x do EVR de Nguyen sob o regime predominante de compressão

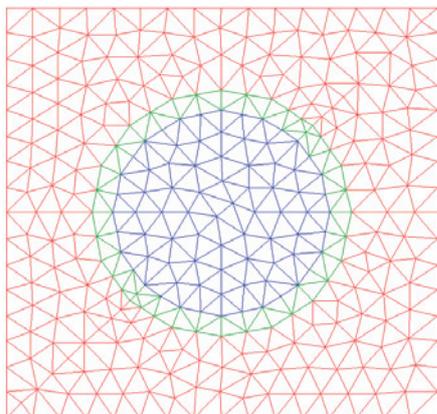


Figura 16
Zona de transição modelada por uma faixa de elementos finitos triangulares

volumétrica é de 35,6%, com 520 elementos finitos triangulares e, quando incluídos, 95 elementos de fraturas ao redor dos agregados. A Figura 10 apresenta as respostas homogeneizadas da tensão na direção x quando utilizando as condições de contorno linear e periódica para o caso do EVR com 4 inclusões apresentado na Figura 3. Já na Figura 11 são apresentadas as respostas para o caso do EVR da Figura 9. Ambas análises de EVRs consideraram o processamento de fraturamento na zona de transição.

O uso de condições de contorno linear e periódica não influenciou as respostas apresentadas na Figura 10 devido à disposição simétrica dos agregados no EVR. Mas quando o EVR não apresenta nenhuma forma de simetria, como mostrado na Figura 9, a resposta homogeneizada apresenta variação após o processo de fraturamento na zona de transição iniciar. Essa variação é pequena, mas acredita-se que por causa do caráter microscópico da análise. Contudo, essa influência deve ter um impacto maior numa análise Multiescala.

3.3 Anisotropia material

Com o objetivo de verificar como a modelagem proposta é capaz de obter respostas complexas da macroestrutura, como por exemplo, a anisotropia, foram realizados estudos nos dois EVRs apresentados nas Figuras 3 e 4. Primeiro, a deformação total imposta aos EVRs foi de $\epsilon_x = 0,0001$ e $\epsilon_y = -0,00001$. Posteriormente, são feitos incrementos em outra configuração, $\epsilon_y = 0,0001$ e $\epsilon_x = -0,00001$. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 12 e 13 em termos de Tensão homogeneizada x Deformações. Na Figura 12 é apresentada a modelagem no EVR com 4 inclusões e na Figura 13 é apresentada no EVR com 8 inclusões.

Na Figura 12, o comportamento em diferentes direções foi o mesmo. Isso acontece por se tratar de um EVR com simetria nos eixos x e y. Mas na Figura 13, o comportamento em diferentes direções apresenta diferenças significativas quando o processo de fraturamento é ativado. Isso se deve ao posicionamento das inclusões no EVR que proporciona uma geometria não simétrica. Portanto, a geometria das inclusões e a consideração do processo de fraturamento na zona de transição levam à captura de um fenômeno

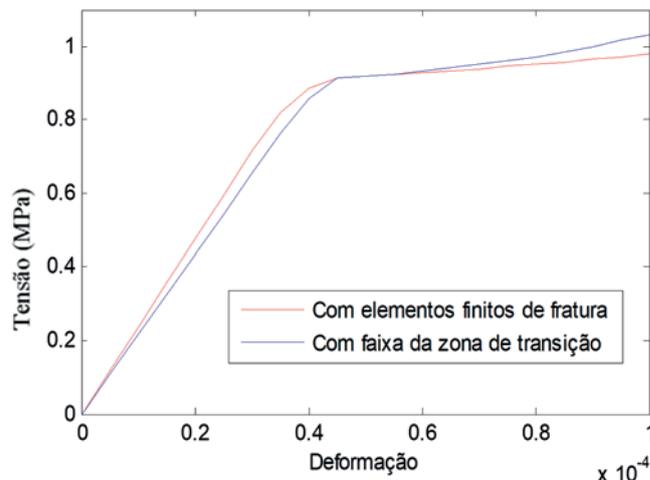


Figura 17
Tensão normal homogeneizada de tração na direção x versus deformação específica de alongamento macroscópica imposta na direção x do EVR com 1 inclusão

complexo macroscópico com a utilização de modelos simples aplicados na mesoescala do material.

3.4 Respostas homogeneizadas em tração e compressão

Nesse exemplo é avaliada qual a influência do processo de fraturamento na zona de transição em regimes predominantes de tração e de compressão. Para isso foi utilizado o EVR apresentado na Figura 9 e os parâmetros considerados em exemplos anteriores. A primeira análise foi realizada no eixo x, com os valores de deformações macroscópicas iguais a $\epsilon_x = 0,0001$ e $\epsilon_y = -0,00001$, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo. Posteriormente, no mesmo eixo foi realizada uma segunda análise considerando ao invés de tração, um estado predominante de compressão de mesma grandeza ($\epsilon_x = -0,0001$ e $\epsilon_y = 0,00001$). Com os valores de tensões homogeneizadas na direção x e deformações impostas na direção x, são produzidos os gráficos das Figuras 14 e 15.

Na Figura 14 é possível ver que o processo de fraturamento atua de forma significativa no EVR em regime predominante de tração, influenciando na rigidez e diminuindo a sua resistência. Já na Figura 15, por se tratar de um EVR sob o regime predominante de compressão, o processo de fraturamento não tem influência significativa, isso porque os elementos de fratura inseridos têm a perda de transmissão conforme o valor da tensão de tração coesiva torna-se significativo, o que não acontece na maioria dos elementos de fratura e contato por estarem pressionados em contato. Os sinais dos valores de tensão e deformação na Figura 15 foram invertidos intencionalmente para melhor visualização.

3.5 Modelagem alternativa da zona de transição do concreto

Para modelar a zona de transição do concreto, alguns autores

consideraram a mesma como uma região que suporta menos tensão localizada ao redor dos agregados com um módulo de elasticidade menor que o utilizado na pasta. Autores como Ramesh et al. [24] e Yang [25] consideraram em suas pesquisas que o valor do módulo de elasticidade da zona de transição fosse um valor percentual da matriz. Nesse exemplo, um EVR contendo apenas uma inclusão central foi utilizado para essa análise, conforme a Figura 15. A fração volumétrica de agregados desse EVR é de 19,6%. Para o EVR sem a faixa da Zona de Transição, a quantidade de elementos finitos é de 612 elementos finitos triangulares e 36 elementos finitos de contato e fratura. Para o EVR com faixa da Zona de Transição e sem elementos de fratura, tem-se 612 elementos finitos triangulares.

Analisou-se o EVR com uma faixa em elementos finitos triangulares que representa a zona de transição do concreto e comparou-se o resultado com outro EVR sem essa faixa, mas com a inclusão de elementos de fratura e contato. Foi considerado para a espessura da faixa de transição o valor de 40 μm , conforme Mehta e Monteiro [22], onde diz que o tamanho da zona de transição compreende numa faixa de 20 até 50 μm .

São utilizados os mesmos parâmetros dos exemplos anteriores e incrementos de deformação macroscópicas totais iguais a $\epsilon_x = 0,0001$ e $\epsilon_y = -0,00001$, sendo γ_{xy} tomado como aproximadamente nulo. Na região em verde da Figura 16 foi utilizado um módulo de elasticidade igual a 50% do valor da matriz, seguindo o preconizado pelos autores citados no início deste item. Na Figura 17 são apresentados os resultados de tensão homogeneizada na direção x e deformação macroscópica imposta na direção x .

Pode-se perceber que para o modelo com a faixa da zona de transição, inicialmente o EVR apresenta uma rigidez menor no regime elástico quando comparada com o modelo sem a faixa e com os elementos de fratura. Porém, conforme o carregamento continua, após a plastificação e fraturamento, o EVR considerando elementos de fratura apresenta uma resposta menos rígida. Por conta dos elementos de fratura, em certo nível de carregamento, que enfraquece bastante a transmissão de forças impactando na sua rigidez, o que não acontece no modelo com a faixa da zona de transição.

4. Conclusões

Neste trabalho, uma modelagem proposta para a simulação do comportamento mecânico do concreto baseado numa abordagem multi-escala foi apresentada. As análises apresentadas restringiram-se à mesoestrutura do material. Alguns fenômenos macroscópicos importantes foram qualitativamente representados utilizando modelos constitutivos simples em formulação aliado à geometria dos constituintes do EVR.

A inclusão de elementos finitos de contato e fratura coesiva na modelagem apresentou resultados coerentes com o comportamento esperado quando incluídos na Zona de Transição do concreto, evidenciando a perda da rigidez na resposta homogeneizada, sem que haja a perda total de transmissão das tensões. Comparado com outras estratégias de simular o efeito da Zona de Transição do concreto, como a utilização de uma faixa de elementos finitos ao redor do agregado menos rígida que o restante da malha, mostrou-se viável já que esse tipo de elemento não influencia a resposta homogeneizada enquanto não for ativada a abertura do elemento.

Por outro lado, a implementação do modelo de plasticidade na análise Multiescala mostrou-se satisfatório para contornar o problema das respostas rígidas apresentadas por Pituba e Souza Neto [12] em regime predominantes de compressão. Contudo, a utilização apenas do modelo de plasticidade na pasta cimentícia não é satisfatório sem a inclusão dos elementos finitos de contato e fratura coesivas, pois os agregados apresentam uma maior rigidez e resistência pela adoção de comportamento elástico linear, impactando na resposta homogeneizada. De uma maneira geral, o trabalho mostra a fundamental importância de representar os fenômenos dissipativos na Zona de Transição para uma modelagem do comportamento mecânico do concreto. Por outro lado, uma limitação da presente proposta é a dificuldade de capturar o comportamento de softening em regime predominante de tração quando da proliferação da fissuração para a matriz cimentícia. Porém, a inserção de elementos de fratura e contato na matriz pode gerar instabilidade da resposta numérica em regime predominante de tração. Uma alternativa a ser investigada em trabalhos futuros é a substituição do elemento de fratura e contato por elementos com alta razão de aspecto desenvolvido por Rodrigues et al. [26]. Contudo, em estruturas de concreto em regime de serviço, a modelagem proposta pode se apresentar como uma ferramenta viável em análises em várias escalas. Acredita-se que essa estratégia deverá possibilitar a captura do regime de softening em tração.

Contudo, mesmo com a limitação citada, os resultados apresentaram coerência com o comportamento mecânico esperado do concreto, capturando fenômenos complexos com modelos constitutivos simples, encorajando trabalhos futuros nesse tema de pesquisa. A modelagem proposta deverá ser empregada na identificação de respostas quantitativas do concreto, assim como na simulação de elementos estruturais de concreto utilizando um acoplamento completo entre escalas. Para tanto, as formulações apresentadas em Fernandes et al. [13] e Fernandes et al. [14] serão fundamentais. Além disso, é necessário o desenvolvimento de uma formulação que considere o fenômeno de localização do dano na microestrutura repercutindo na macroestrutura com a formação de uma fratura, como visto em Sánchez et al. [27].

5. Agradecimentos

Os autores desejam agradecer a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

6. Referências bibliográficas

- [1] PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R.. An anisotropic damage for the concrete. *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, v. 137, 2011; p. 610-624.
- [2] BRANCHERIE, D.; IBRAHIMBEGOVIC, A. Novel anisotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures. Part I: theoretical formulation and numerical implementation. *Engineering Computations*, v. 26, 2009; p. 100-127.
- [3] ZHU, Q.; KONDO, D.; SHAO, J.; PENSEE, V. Micromechanical modelling of anisotropic damage in brittle rocks and application. *International Journal of Rock Mechanics and Mining*, v. 45, 2008; p. 467-477.

- [4] PITUBA, J. J. C.; DELALIBERA, R. G.; RODRIGUES, F. S. Numerical and statistical analysis about displacements in reinforced concrete beams using damage mechanics. *Computers and Concrete, an International Journal*, v. 10, n. 3, 2012; p. 307-330.
- [5] PEREIRA JR, W. M.; ARAÚJO, D. L.; PITUBA, J. J. C. Numerical analysis of steel-fiber-reinforced concrete beams using damage mechanics. *Ibracon Structures and Materials Journal*, v. 9, n. 2, 2016; pp. 153-191.
- [6] PITUBA, J. J. C. A damage model formulation: unilateral effect and RC structures analysis. *Computers and Concrete, an International Journal*, v. 15, n. 5, 2015; p. 709-733.
- [7] PERIC, D.; DE SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO, R. A.; PARTOVI, M.; CARNEIRO MOLINA, A. J. On micro-to-macro transitions for multiscale analysis of heterogeneous materials: unified variational basis and finite element Implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 87, 2011; p. 149-170.
- [8] MIEHE, C.; KOCH, A. Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. *Archive of Applied Mechanics*, v. 72, 2002; p. 300-317.
- [9] GITMAN, I. M. Representative volumes and multi-scale modeling of quasi-brittle materials. PhD Thesis, Technische Universiteit Delft, 2006.
- [10] WRIGGERS, P.; MOFTAH, S. O. Mesoscale models for concrete: homogenization and damage behavior. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 42, 2006; p. 623-636.
- [11] LÓPEZ, C. M.; CAROL, I.; AGUADO, A. Meso-structural study of concrete fracture using interface elements. I: numerical model and tensile behavior. *Material and Structures*, v. 41, 2008; p. 583-599.
- [12] PITUBA, J. J. C.; SOUZA NETO, E. A. Modeling of unilateral effect in brittle materials by a mesoscopic scale approach. *Computers and Concrete, An International Journal*, v.15, 2015; p. 1-25.
- [13] FERNANDES, G. R.; PITUBA J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogeneous plates by coupling BEM and FEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 51, 2015; p. 1-13.
- [14] FERNANDES, G. R.; PITUBA J. J. C.; DE SOUZA NETO, E. A. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 54, 2015; p. 47-59.
- [15] GIUSTI, S. M.; BLANCO, P. J.; DE SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO, R. A. An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach. *Engineering Computations*, v. 26, 2009; p. 281-301.
- [16] CIRAK, F.; ORTIZ, M.; PANDOLFI, A.. A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmentation. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v. 194, 2005; p. 2604-2618.
- [17] ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 44, 1999; p. 1267-1282.
- [18] OLIVER, J.; CAICEDO, M.; ROUBIN, E.; HERNADÉZ, J. A.; HUESPE, A. Multi-scale (FE²) analysis of materials failure in cement/aggregate-type composite structure. *In: EURO-C*, 2004, St. Anton am Alberg, XX. Anais. Computational Modelling of Concrete Structure, Londres: CRC PRESS, 2014, v.1, p. 39-49.
- [19] PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R.; SOUZA NETO, E. A. Modelling of cohesive fracture and plasticity processes in composite microstructures. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 142, 2016, pp. 04016069-1 – 04016069-15.
- [20] SOUZA NETO, E. A.; PERIÉ, D.; OWEN, D. R. J. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Swensea: Wiley, 2008.
- [21] ASSAAD, J. J.; HARB, J.; MAALUF, Y. Measurement of yield stress of cement pastes using the direct shear test. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 214, 2014; p. 18-27.
- [22] MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. *Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais*. 1ª. ed. São Paulo: PINI, 2008.
- [23] NGUYEN, V.P.; LLOBERAS VALLS, O.; STROEVEN, M.; SLUYS, L.J. On the existence of representative volumes for softening quasi-brittle materials – a failure zone averaging scheme”, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v. 199, 2010; p. 3026–3036.
- [24] RAMESH, G.; SOTELINO, E.D.; CHEN, W.F. Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials. *Cement and Concrete Research*, v. 26, 1996; p. 611-622.
- [25] YANG, C.C. Effect of transition zone on elastic moduli of mortar. *Cement and Concrete Research*, v. 28, 1998; p. 727-736.
- [26] RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L.; BITENCOURT JR, L. A. G.; BITTENCOURT, T. N. 2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio, *International Journal of Solids and Structures*, v. 94-95, 2016; p. 112-124.
- [27] SÁNCHEZ, P. J., BLANCO, P. J., HUESPE, A. E. AND FEIJÓO, R. A. Failure-Oriented Multi-scale Variational Formulation: Micro-structures with nucleation and evolution of softening bands, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 257, 2013; p. 221-247.