

Recommendations for verifying lateral stability of precast beams in transitory phases

Recomendações para verificação da estabilidade lateral de vigas pré-moldadas em fases transitórias



P. A. KRAHL^a
pablokrahl@usp.br

M. C. V. LIMA^b
macris@ufu.br

M. K. EL DEBS^a
mkdebs@sc.usp.br

Abstract

This paper presents recommendations for security check of precast beams in transitory phases, compare results of parametric analyzes with national and international code recommendations and confront the formulations used for the calculation of critical load of lateral instability. In transport and lifting phases, precast beams are susceptible to loss lateral stability because the established supports provides little restriction to the element rotate on its principal axis and move laterally. To recommend limits of slenderness, parametric analysis are performed using formulations based on bifurcational instability, including eigenvalue problems with the finite element method. The results show that the safety limits for I beams and rectangular beams are different. For the analyzed cases and with reference to beam slenderness equation used by fib Model Code [13], the limit determined for rectangular beams would be 85 and for I beams 53, which could be taken as 50, as recommended by the code. Within the analyzed cases of I beams, only the fib Model Code [13] recommendation attend the slenderness limit for transitory phases.

Keywords: lateral instability of beams, precast concrete, lifting, transport, slenderness.

Resumo

Este artigo objetiva apresentar recomendações para a verificação da segurança de vigas pré-moldadas em fases transitórias, comparar resultados de análises paramétricas com recomendações de normas nacionais e internacionais e confrontar as formulações utilizadas para o cálculo da carga crítica de instabilidade lateral. Nas fases transitórias de transporte e içamento, as vigas pré-moldadas são suscetíveis à perda de estabilidade lateral, porque a vinculação estabelecida oferece pequena restrição ao elemento de girar em torno de seu eixo e deslocar-se lateralmente. Para recomendar limites de esbeltez são realizadas análises paramétricas utilizando formulações baseadas em instabilidade bifurcacional, incluindo problemas de autovalor com o método dos elementos finitos. Os resultados mostram que os limites de segurança para vigas I e retangular são diferentes. Para os casos analisados e tomando como referência a equação de esbeltez de viga utilizada pelo fib Model Code [13], o limite determinado para vigas retangulares seria de 85 e para vigas de seção I seria de 53, o que poderia ser tomado igual a 50, como recomendado pela norma. Dentre os casos analisados de vigas I, somente a recomendação do fib Model Code [13] atende o limite de esbeltez para fases transitórias.

Palavras-chave: instabilidade lateral de vigas, concreto pré-moldado, içamento, transporte, esbeltez.

^a Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP, Brasil;
^b Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil..

1. Introdução

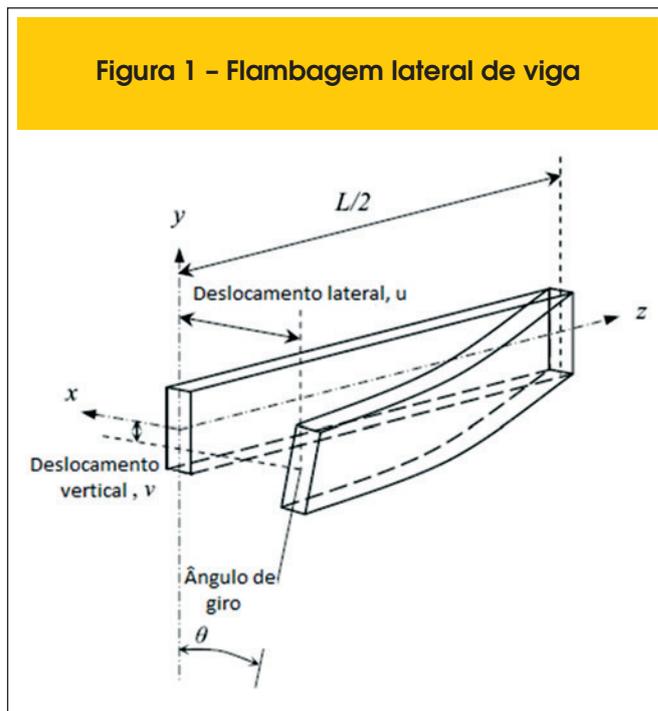
O aumento da resistência do concreto, as melhorias nos processos de fabricação e o aumento da capacidade dos equipamentos de transporte e içamento, possibilitam a produção de vigas pré-moldadas com seções delgadas e grandes vãos.

Os elementos de concreto pré-moldado são sujeitos às fases transitórias de transporte e içamento. Nestas situações, as vinculações provisórias não restringem a rotação por torção do elemento como ocorre nas fases definitivas, permitindo assim que se desloque lateralmente. Em geral, as fases transitórias de vigas pré-moldadas são consideradas mais críticas do ponto de vista de instabilidade lateral, conforme já apresentados em Lima [1] e [2], El Debs [3] e Krahl [4]. Normalmente na direção lateral as vigas tem baixa rigidez à flexão e quando sofre rotação em torno do seu eixo longitudinal, parte do peso próprio passa a atuar lateralmente. Somando-se o efeito da protensão, o estado de tensões em pontos específicos da seção (geralmente a mesa superior) pode superar o nível de tensão que provoca fissuração no concreto.

Assim, no projeto de vigas pré-moldadas é necessária a verificação da estabilidade lateral do elemento em fases transitórias. A verificação pode ser realizada, nestes casos, por uma análise não linear-geométrica e física (estudo de carga limite) ou por limites de segurança, estabelecidos pela verificação de instabilidade bifurcacional (carga crítica de instabilidade). Este último caso é utilizado pelas normas de segurança de estruturas de concreto para obtenção de limites de esbeltez.

Neste contexto, enquadram-se os estudos de estabilidade de vigas que consideram a flexibilidade das ligações. Segundo Trahair [5],

Figura 1 - Flambagem lateral de viga



não é possível obter soluções exatas ou analíticas de carga crítica de instabilidade lateral de vigas com vinculações parciais. Então, é necessário recorrer à utilização de métodos numéricos para obtenção de soluções aproximadas, como é o caso de Lebellet [6], Trahair [5] e Lima [1]. Destacam-se, dentre os métodos comumente utilizados para análise bifurcacional, o método de Rayleigh-Ritz, Galerkin, Runge-Kutta, Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos.

Stratford et al [7] utilizaram o método dos elementos finitos para realização de análises não-lineares geométricas. Foram consideradas imperfeições geométricas iniciais, apoios inclinados que não são incluídos nas análises de bifurcação de equilíbrio. Com base nos resultados, Stratford e Burgoyne [7] recomendam formulações simplificadas para o cálculo da carga crítica com a utilização da hipótese de Southwell [8] para considerar o efeito das imperfeições iniciais.

As atuais normas brasileiras ABNT NBR 9062:2006 [9] e ABNT NBR 6118:2014 [10], para projeto de estruturas de concreto pré-moldado e concreto moldado no local, não apresentam recomendações para verificação da estabilidade lateral de vigas em fases transitórias. Na Tabela 1 são apresentados de forma sintetizada os limites de esbeltez recomendados por algumas normas internacionais, destacando, quando contemplado, casos específicos de limites para fases transitórias.

Como dito, a verificação da estabilidade lateral de vigas em situações transitórias é necessária para evitar possíveis danos aos elementos, os quais podem comprometer seu desempenho estrutural. Além disso, há registros de acidentes ocorridos nestas fases de construção, sendo alguns casos apresentados em Krahl [4].

Este artigo tem a finalidade de apresentar limites de segurança para a verificação da estabilidade lateral de vigas pré-moldadas em fases transitórias. Estes limites serão comparados às recomendações normativas apresentadas na Tabela 1. Os resultados obtidos para os modelos analíticos e numéricos utilizados serão confrontados.

Tabela 1 - Recomendações normativas para estabilidade lateral de vigas de concreto

Norma/código	Limite de esbeltez	
	Fase definitiva	Fase transitória
Eurocode 2 (11)	$\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} < 50$ $h / b_f < 2,5$	$\ell_{of} h_{1/3} / b_f^{4/3} < 70$ $h / b_f < 3,5$
ABNT NBR 9062 (9) ²	$\ell_{of} h / b_f^2 < 500$ $\ell_{of} / b_f < 50$	$h_m / a > 2$
ACI 318-02 (12) ¹	$\ell_{of} / b_f < 50$	
fib Model Code (13) ¹	$\ell_{of} h_{1/3} / b_f^{4/3} < 50$	
BS:8110-1 (14) ¹	$\ell_{of} h / b_f^2 < 250$ $\ell_{of} / b_f < 60$	
ABNT NBR 6118 (10) ¹	$h / b_f < 2,5$ $\ell_{of} / b_f < 50$	

ℓ_{of} : vão teórico ou espaçamento entre contraventamentos;
 h: altura da seção;
 b_f: largura da mesa comprimida. Para seção retangular trocar b_f por b_w;
 h_m: distância entre o centro de gravidade da seção e o ponto de apoio;
 a: deslocamento lateral elástico da viga, considerando o peso próprio atuando nessa direção.

Notas¹ não distinguem entre fase transitória e definitiva² Como a versão atual não contempla o assunto, está sendo feita referência a versão anterior.

2. Fundamentação

Da teoria clássica de instabilidade lateral de vigas, como por exemplo apresentada em Timoshenko e Gere [15], sabe-se que uma viga fletida no seu plano de maior inércia pode sofrer flambagem lateral se sua região comprimida não estiver contraventada. O fenômeno é caracterizado por deslocamento lateral e giro por torção, como mostrado na Figura 1.

O comportamento não-linear geométrico de vigas é influenciado por diversos fatores que podem ser considerados de maneira simplificada na análise bifurcacional. São eles: tipo de carregamento, ponto de aplicação da carga em relação ao centro de cisalhamento, condições de vinculação e imperfeições geométricas. Para as fases transitórias, o carregamento admitido é o peso próprio. Portanto, o primeiro e segundo fatores são constantes no problema. Como dito, serão realizadas análises paramétricas para estabelecer valores limites de esbeltez. Para as análises serão utilizadas as soluções de carga crítica de Lebellet [6], Stratford e Burgoyne [7] e soluções de autovalor pelo método dos elementos finitos.

As análises de autovalor serão realizadas pelo programa computacional de acesso livre LTBeam [16]¹. O programa calcula a carga crítica de instabilidade lateral de vigas para diversas condições de apoio e carregamento. A fundamentação será apresentada com base em Trahair [5].

Lebellet [6] apresenta a solução para obtenção da carga crítica de instabilidade de vigas vinculadas a apoios deformáveis à torção. Com isso, é permitida a rotação por torção da viga nos apoios, correspondente a uma rigidez k_θ . Segue a solução na Equação (1).

$$P_{crit} = k \frac{16}{\ell^3} \sqrt{\alpha_{crit}} \sqrt{EI_y GI_t} \quad (1)$$

sendo,

k: constante que depende da rigidez das mesas no caso de vigas de seção I (coeficiente β) e da posição dos apoios em relação ao centro de giro da sessão (coeficiente δ), segue a constante na Equação (2);

$$k = \sqrt{1 + 2,47\beta + 0,52\delta^2} - 0,72\delta \quad (2)$$

onde,

β : coeficiente que leva em conta a rigidez lateral das mesas, Equação (3);

$$\beta = \frac{EI_{y,mesas}}{GI_t} \frac{2z}{\ell^2} \quad (3)$$

$I_{y,mesas}$: média ponderada das inércias das mesas da viga;

z: distância entre os centróides das mesas, no caso de seção retangular z=0;

δ : coeficiente que leva em conta a posição dos apoios em relação ao centro de cisalhamento, Equação (4);

$$\delta = \frac{2y_{rot}}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_t}} \quad (4)$$

y_{rot} : distância entre o ponto de aplicação de carga e o eixo de giro;

ℓ : vão total da viga;

E: módulo de elasticidade do concreto;

Tabela 2 - Valores para o coeficiente α_{crit} com base no resultado da função $g(\alpha)$

$g(\alpha)$	$q = a/\ell$					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,02	2,55	2,4	0,133	0,018	0,0043	0,0014
0,04	10,1	9,23	0,523	0,0716	0,0171	0,0056
0,08	40	31,8	1,95	0,278	0,0672	0,0222
0,16	150,1	83,5	6,28	1	0,253	0,0854
0,32	485,3	148,4	14,8	2,93	0,83	0,297
0,6	1079,5	193,1	23,8	5,76	1,89	0,751
1,2	1833	222,4	31,7	8,9	3,34	1,48
2,5	2396,5	238,4	36,7	11,2	4,57	2,19
5	2678,2	245,9	39,3	12,5	5,29	2,63
10	2817,1	249,7	40,7	13,2	5,68	2,88
20	2885,3	251,6	41,4	13,5	5,89	3,02
40	2919,7	252,5	41,7	13,7	6	3,09
100	2944,4	253,5	42	13,9	6,07	3,16

¹ [disponível em <https://www.cticm.com/content/ltbeam-version-1011>. Acesso em 28 de março 2015.]

I_y : momento de inércia em relação ao eixo vertical;
 G : módulo de cisalhamento do concreto;
 I_t : momento de inércia à torção;
 α_{crit} : coeficiente que estima o efeito da deformabilidade nos apoios.
 A Equação (1) pode ser utilizada para içamento e transporte. As diferenças são a distância entre a posição do eixo de giro em relação ao centro de gravidade (y_{rot}) e o coeficiente α_{crit} , particular a cada fase transitória.

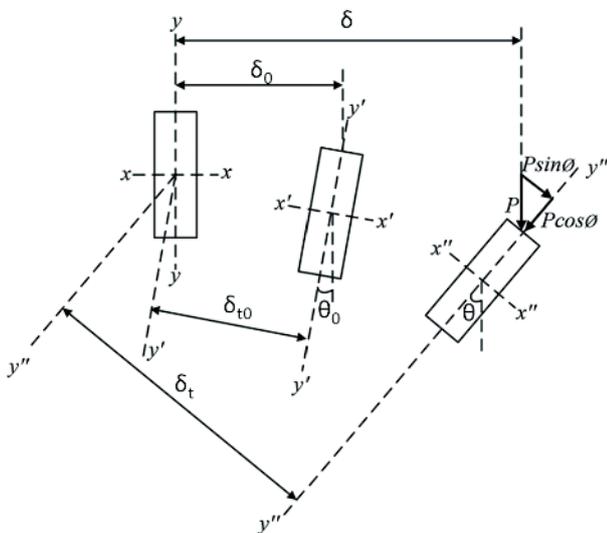
Para içamento, α_{crit} depende da posição dos cabos, de y_{rot} e das rigidezes à flexão lateral e torção. Pode-se obter o α_{crit} com a Tabela 2 que, segundo Lebellet [6], relaciona esta variável à função $g(\alpha)$, expressa pela Equação (5). Assim, calcula-se $g(\alpha)$ e obtém-se α_{crit} para uma dada relação $\varrho = a/\ell$. Sendo a o comprimento do balanço e ℓ o vão total.

$$g(\alpha) = \frac{4y_{rot}}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_t}} \tag{5}$$

Sendo y_{rot} distância entre o ponto de aplicação de carga e o eixo de giro. Em transporte, α_{crit} depende da rigidez da suspensão do veículo e da rigidez à torção da viga. Lebellet [6] apresenta uma função que permite estimar α_{crit} e, conseqüentemente, a carga crítica para dado valor de rigidez k_θ , Equação (6).

$$\frac{k_\theta \ell}{2GI_t} = f(\alpha) = \frac{\frac{8}{15}\alpha - \frac{356}{10395}\alpha^2}{1 - \frac{11}{30}\alpha + \frac{6617}{415800}\alpha^2} \tag{6}$$

Figura 2 - Deslocamentos laterais e giro da seção



Para a situação transitória de transporte, Stratford e Burgoyne [7] recomendam para a carga crítica de instabilidade a Equação (7).

$$P_{crit} = 16,9 \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{\ell^3} \tag{7}$$

Para considerar as imperfeições geométricas Stratford e Burgoyne [7] recomendam a utilização da hipótese de Southwell [8], Equação (8).

$$\delta_t = \frac{\delta_0}{1 - \left(\frac{P_{lim}}{P_{crit}}\right)^2} \tag{8}$$

Sendo δ_0 o deslocamento lateral inicial. Com a consideração da rigidez à torção, a relação entre o ângulo limite de instabilidade θ_{lim} e o deslocamento correspondente δ_t , segundo Stratford e Burgoyne [7], pode ser admitida pela Equação (9).

$$\frac{\theta_{lim}}{\delta_t} = \frac{1,68}{0,36\ell \sqrt{\frac{GI_t}{EI_y} + y_{rot}}} \tag{9}$$

Portanto, com as Equações (8) e (9), somam-se três incógnitas θ_{lim} , δ_t e P_{lim} . Para solução, normalmente adota-se um valor para θ_{lim} . Considerando que as curvas em rodovias têm em média 8% de superelevação ou 4,57 graus, é adotado conservadoramente um θ_{lim} de 6 graus ou 0,105 rad.

Para o caso de içamento por dois pontos com cabos verticais, Stratford e Burgoyne [7] recomendam a Equação (10) que estima a carga crítica de uma viga perfeita.

$$P_{crit} = \frac{12EI_y y_{rot}}{\frac{\ell^4}{10} - a\ell^3 + 3a^2\ell^2 - 2a^3\ell - a^4} \tag{10}$$

onde,

EI_y : rigidez elástica à flexão lateral;

y_{rot} : distância entre o ponto de aplicação de carga e o eixo de giro;

a : comprimento dos balanços;

ℓ : vão total da viga.

Para considerar as imperfeições geométricas, novamente é utilizada a hipótese de Southwell [8], Equação (11).

$$\delta_t = \frac{\delta_0 \left[1 - \text{sen}\left(\frac{\pi a}{\ell}\right) \right]}{1 - \frac{P_{lim}}{P_{crit}}} \tag{11}$$

Tabela 3 – Propriedades geométricas dos elementos pré-moldados analisados

Viga retangular			Viga I		
Largura (cm)	Altura (cm)	Vão (m)	Largura da mesa (cm)	Altura (cm)	Vão (m)
15 a 50	150	30	40 a 80	150	30
20	150	20 a 30	80	150	30 - 40

Sendo p_{lim} a carga limite de instabilidade que leva em conta as imperfeições geométricas da viga.

Considerando a relação entre os deslocamentos lateral inicial δ_o , final δ_t e o giro da seção no estágio limite θ_{lim} , uma componente da carga $p_{lim} \sin \theta_{lim}$ atuará lateralmente (Figura 2), sendo o deslocamento provocado $(\delta_t - \delta_o)$ expresso pela Equação (12).

$$\delta_t - \delta_o = \frac{g_{sw} \sin \theta_{lim}}{384EI_y} (5\ell^2 - 20a\ell - 4a^2) \left(\frac{6}{5}a^5 - \ell \right)^2 \quad (12)$$

sendo,

g_{pp} : peso próprio;

θ_{lim} : ângulo limite de instabilidade.

Substituindo a equação (12) na Equação (11), têm-se as incógnitas p_{lim} e θ_{lim} na expressão resultante. Para obter p_{lim} utiliza-se a recomendação de Mast [17] para o ângulo limite. Mast [17] realizou ensaios com uma viga PCI BT-72 em escala real e estabeleceu um ângulo limite de 23 graus para içamento.

O programa computacional LTBeam [16] é utilizado na análise paramétrica. A carga crítica é obtida pelo cálculo do menor autovalor, sendo a viga discretizada, no mínimo, em 100 elementos finitos. Trahair [5] apresentou o procedimento para implementação em elementos finitos desta análise considerando o princípio dos trabalhos virtuais.

Para obtenção dos autovalores λ_{cr} e autovetores $\{\delta\}$ pelo método dos elementos finitos é necessária a obtenção da matriz geométrica ou matriz de estabilidade [G] para cada elemento, além da matriz de rigidez [K]. A matriz geométrica provém da parcela de energia correspondente à variação do trabalho das forças externas. O problema de autovalor e autovetor pode ser representado pela Equação (13).

$$([K] - \lambda_{cr} [G])\{\delta\} = 0 \quad (13)$$

O conjunto de cargas *do fib* Modelo está inserido na matriz geométrica. A resolução da Equação (13) depende da inversão da matriz [G] e a utilização de um método numérico para obter λ_{cr} . Outra possibilidade é inverter a matriz de rigidez e obter $1/\lambda_{cr}$. Para a obtenção dos valores críticos, basta multiplicar λ_{cr} pelo conjunto de cargas adotadas.

O programa possibilita a inserção de apoios elásticos discretos. Podem ser inseridas molas para restringir parcialmente deslocamento lateral, rotação por flexão lateral, rotação por torção e

empenamento. Para as fases transitórias, a rigidez do vínculo de torção é o principal parâmetro.

3. Resultados e discussões

São apresentados os resultados de análises paramétricas de viga em fase transitória utilizando as formulações apresentadas de análise bifurcacional. Os resultados de vigas retangulares e vigas I são apresentados separadamente. Para as análises paramétricas com cada tipo de seção, será tomada a menor esbelteza obtida como limite de segurança.

Os gráficos apresentam os resultados da fase de içamento juntamente à fase transporte, com a carga crítica nas ordenadas e esbelteza geométrica nas abscissas. As relações geométricas para obtenção da esbelteza foram obtidas de acordo como o Eurocode 2 [11]. Os limites desta norma, para fases transitórias, seguem na Equação (14).

$$\frac{h}{b_f} \leq 3,5 \quad \text{e} \quad \frac{\ell_{or} h^{1/3}}{b_f^{4/3}} \leq 70 \quad (14)$$

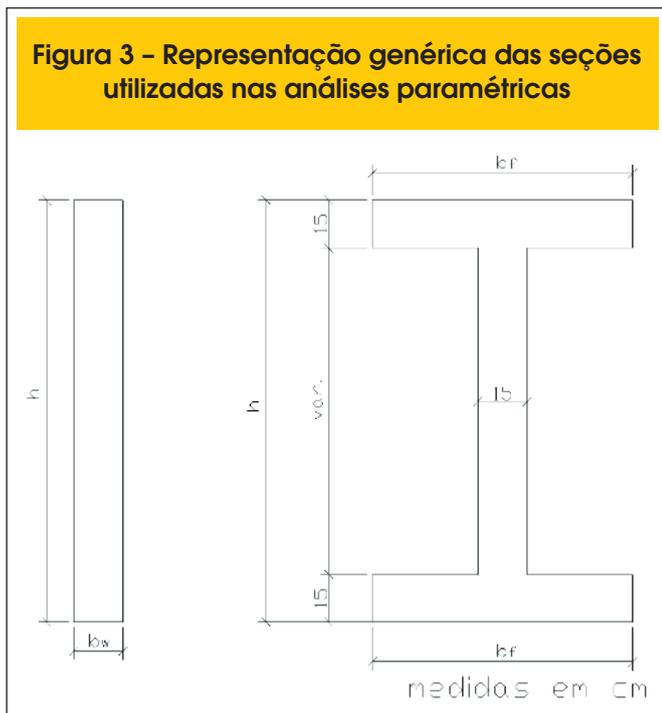
Para a obtenção de limites de esbelteza é considerado como critério de segurança a relação $p_{crit} / p_p > 4$ que tem por fundamento a dificuldade em se prever as condições da realização das etapas de transporte e içamento. Em Krahl [4] são apresentadas análises utilizando a formulação de Mast [17], através da qual se obtém um limite menor para esta relação. No entanto, será utilizado este critério, comparado a resultados de análises paramétricas, para obter limites de segurança.

Mantidas as demais variáveis, o aumento da resistência à compressão do concreto tem efeito benéfico sobre a estabilidade lateral de vigas, então será considerada a resistência de 30 MPa para a fase transitória) em todas as análises, um pouco menor que a resistência característica mínima de elementos de concreto pré-moldado para as situações definitivas.

Os efeitos de imperfeições e desvios no posicionamento dos cabos de içamento e sobre o caminhão de transporte reduzem consideravelmente a segurança contra instabilidade. A avaliação da importância destes fatores é apresentada em Krahl [4].

As esbeltezas apresentadas na Equação (14) não são alteradas com a variação de imperfeições geométricas e módulo de elasticidade. Para considerá-los é necessária uma expressão de esbelteza que utilize a carga crítica. No entanto, esta não tem sido a prática das normas. Então, de maneira conservadora, os limites de esbelteza geométrica são obtidos para a imperfeição recomendada pelo Eurocode 2 [11] de $\ell/300$ de

Figura 3 – Representação genérica das seções utilizadas nas análises paramétricas



deslocamento lateral e a resistência à compressão do concreto para fase transitória de 30 MPa, sendo ℓ o vão total da viga. Destaca-se que em todas as análises é considerado um balanço de 2,5 m.

A formulação de Lebellet [6] e o programa LTBeam [16] possibilitam a utilização de vínculos elásticos. Segundo Mast [17], recomenda-se como vinculação parcial à torção para vigas em transporte um valor entre 360 a 680 kNm/rad para cada eixo duplo. Foi adotado, neste artigo, a configuração de quatro eixos duplos e um simples, resultando em 1530 kNm/rad (360 kNm/rad por eixo duplo). A rigidez do vínculo de torção considerada para içamento é de 1200 kNm/rad.

As relações geométricas utilizadas nas análises paramétricas seguem na Tabela 3. As espessuras de mesa e alma das vigas I são fixas em 15 cm. A representação genérica das seções segue na Figura 3.

3.1 Variação da largura de viga retangular

Os resultados de carga crítica de viga retangular com larguras de 15, 20, 30, 40 e 50 cm são apresentados na Tabela 4. A altura da seção é 150 cm e o vão de 30 m, sendo $\ell / h = 20$.

Na Figura 4, a linha traço e ponto representa o peso próprio e a linha tracejada representa quatro vezes este valor. Sendo este último o critério de segurança. Nos gráficos apresentados na Figura 4, içamento e transporte estão separados, sendo apresentados os resultados para as relações de esbeltez geométrica apresentadas nas Equações (14).

De acordo com a Figura 4, à medida que a largura da viga aumenta, o valor da carga crítica aumenta, tendendo a ultrapassar o limite de segurança. Na fase de içamento, para esbeltezes $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} \leq 85$ e $h / b_w \leq 7,5$ a segurança de vigas retangulares é verificada. O primeiro limite é maior que a recomendação do Eurocode 2 [11] e *fib* Model Code [13]. O segundo resulta menor que o limite do Eurocode 2 [11], sendo contra a segurança o limite da norma.

Para a esbeltez $\ell_{of} h / b_w^2$, obtém-se o limite de 180 correspondente a carga crítica considerada como segura, sendo este menor que a recomendação do BS:8110-1 [14] e ABNT NBR 9062:2006 [9], como mostra a Tabela 1. Portanto, as recomendações do código britânico e da norma brasileira são contra a segurança para fases transitórias de vigas retangulares.

A esbeltez $\ell_{of} h / b_w$ resulta 60 que coincide com o recomendado pelo BS:8110-1 [14]. A recomendação do ACI 318-02 [12] e ABNT NBR9062:2006 [9] são conservadoras, mas a favor da segurança. Em transporte, a formulação de Lebellet [6] não atinge o mesmo limite determinado em içamento, como mostra a Figura 4. No entanto, as outras formulações tiveram a segurança verificada em transporte para os mesmos limites de içamento.

Nos gráficos da Figura 4, verifica-se que a formulação de Stratford e Burgoyne [7] tende a apresentar carga crítica elevada à medida que a esbeltez é reduzida. No caso de içamento, a formulação dos autores apresenta grande sensibilidade a imperfeições geométricas, sendo que para esbeltez $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} = 86,53$ a redução na carga crítica é de 48%.

No içamento, a formulação de Stratford e Burgoyne [7] que considera imperfeições geométricas teve resultados próximos aos obtidos pelo método dos elementos finitos (LTBeam) para

Tabela 4 – Carga crítica de viga retangular para variação da largura da seção

h / b_w	$\ell_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3}$	Carga crítica de instabilidade (kN/m)							
		Lebellet		Stratford et al.		Stratford et al. ¹		LTBeam	
		I ²	T	I	T	I	T	I	T
10,00	430,89	4,07	10,62	3,82	10,24	3,73	9,87	10,45	11,51
7,50	293,62	9,55	18,43	9,14	24,28	8,61	23,40	17,61	19,64
5,00	171,00	31,5	35,37	31,13	81,96	25,78	79,00	34,14	38,38
3,75	116,52	72,75	53,63	74,13	194,30	49,70	187,20	53,32	60,09
3,00	86,53	138,30	60,48	145,17	379,45	74,06	365,63	74,9	84,50

Notas ¹ Formulação considera imperfeições geométricas ² As letras I e T representam içamento e transporte, respectivamente.

Figura 4 - Carga crítica de viga retangular para variação da largura

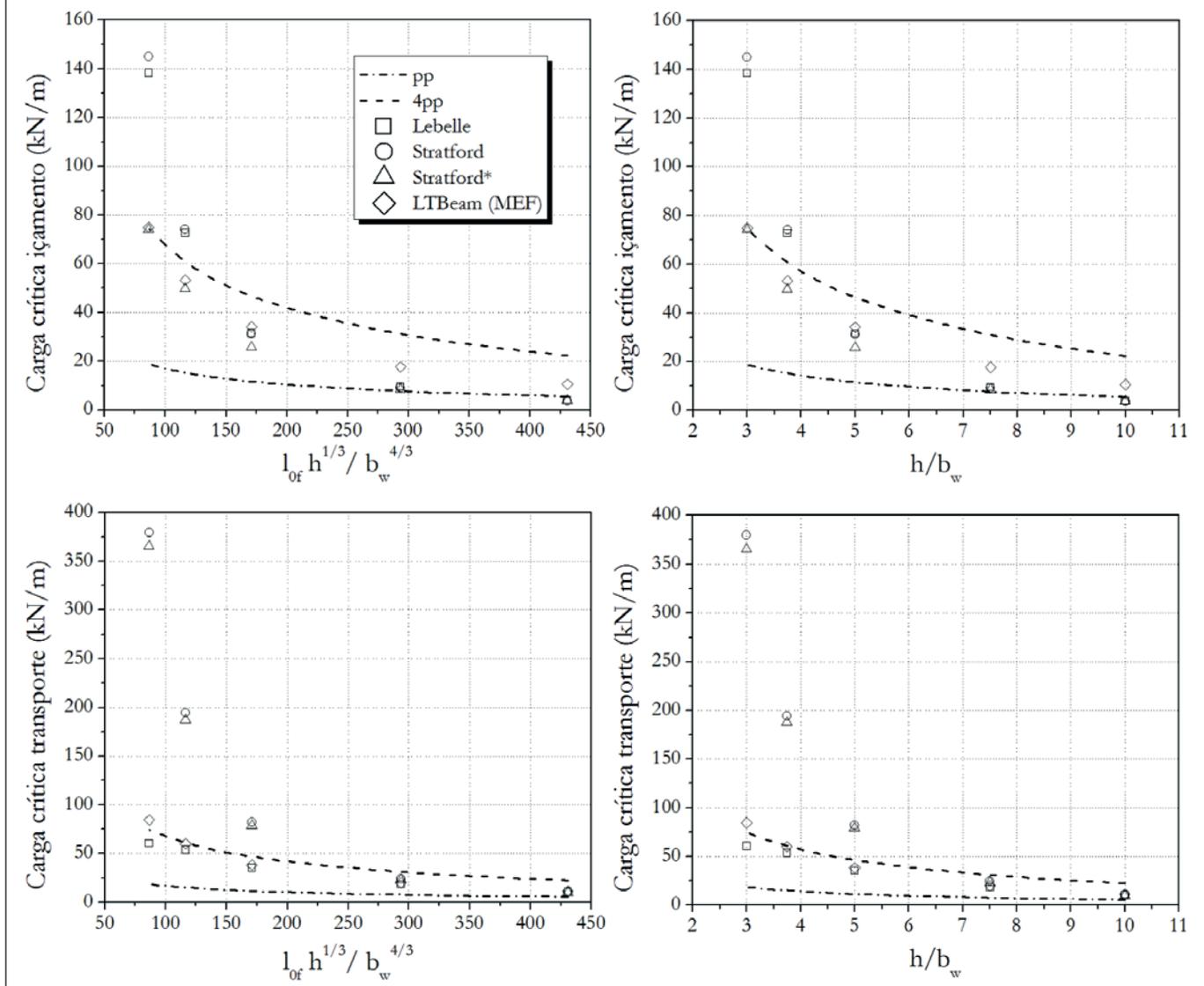
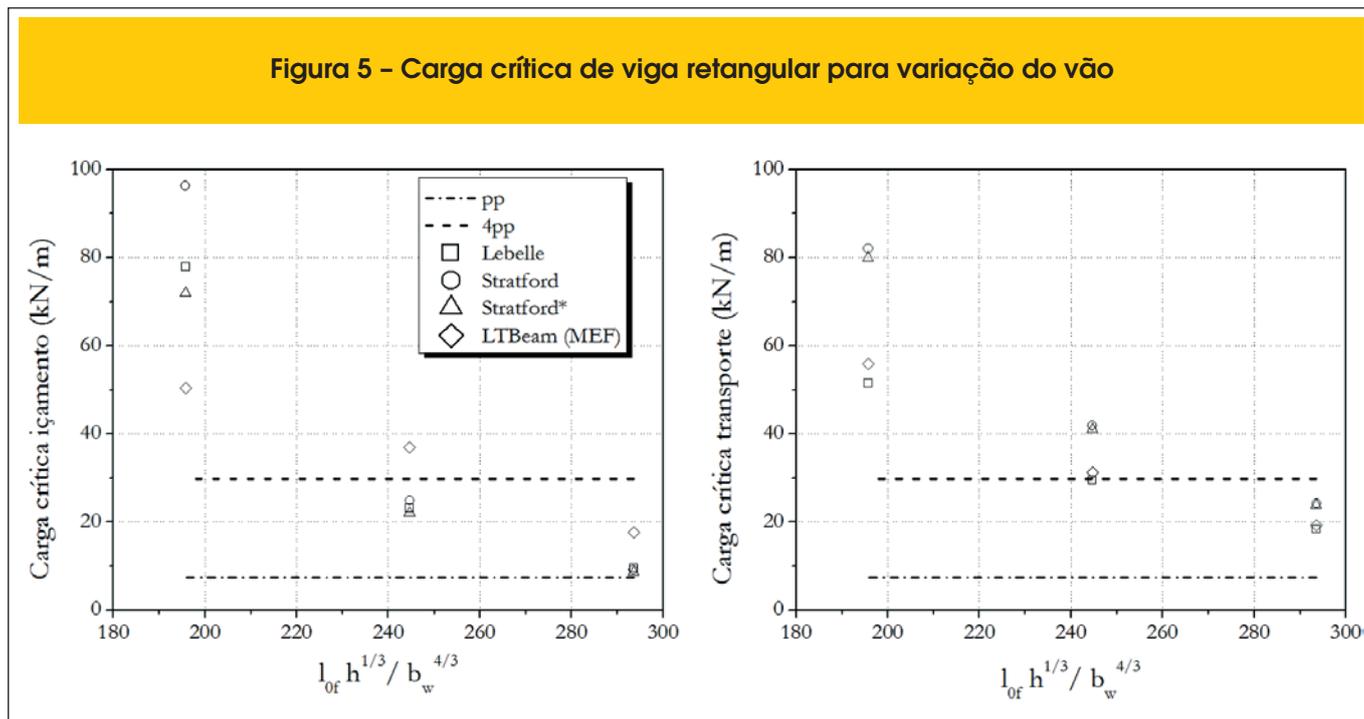


Tabela 5 - Carga crítica de viga retangular para variação do vo

Vão (m)	$l_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3}$	Carga crítica de instabilidade (kN/m)							
		Lebelle		Stratford et al.		Stratford et al. ¹		LTBeam	
		I ²	T	I	T	I	T	I	T
20	293,62	9,55	18,43	9,14	24,28	8,61	23,79	17,61	19,34
25	244,68	23,20	29,49	24,83	41,96	22,03	41,03	37,00	31,20
30	195,74	77,80	51,50	96,30	81,96	71,94	79,93	50,40	55,78

Notas ¹ Formulação considera imperfeições geométricas ² As letras I e T representam içamento e transporte, respectivamente

Figura 5 - Carga crítica de viga retangular para variação do vão



as menores esbeltezes consideradas, a diferença é 1,12% e 6,75%, para os dois primeiros casos. No entanto, à medida que a esbelteza aumenta, a diferença aumenta para 64%.

No caso da fase de transporte, a formulação de Lebelle [6] teve resultados próximos aos obtidos com o programa computacional LTBeam [16] para esbeltezes elevadas, mas com a diminuição desse parâmetro a diferença aumenta, para o intervalo de esbeltezes avaliados os casos extremos são 7,7% e 28,4%. A formulação de Lebelle [6] para içamento apresenta grande variação na carga crítica à medida que a esbelteza é reduzida.

3.2 Variação do vão da viga retangular

Para avaliar a influência no cálculo da carga crítica de instabilidade lateral são adotados vãos de 20, 25 e 30 m. Os resultados são apresentados na Tabela 5 e Figura 5. A seção retangular tem 20 cm de largura por 150 cm de altura, portanto, a relação h / b_w tem valor constante, sendo igual a 7,5. Este valor, segundo o limite

obtido no item 3.1, não verifica o limite de segurança $h / b_w \leq 3$. As relações l / h são 13, 17 e 20.

De acordo com a Figura 5, no caso da viga com esbelteza $l_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3} = 200$ todas as formulações apresentam resultados de carga crítica que verificam a segurança para içamento e transporte. Neste momento, destaca-se a limitação ao se recomendar um limite de esbelteza geométrico para verificar a segurança da estabilidade de vigas.

Seguindo a recomendação do item 3.1 ($l_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3} = 85$ e $h / b_w \leq 3$) a viga com relação $h / b_w = 7,5$ e vão de 20 m não tem a segurança contra instabilidade verificada ($l_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3} = 293,62$). No entanto, o resultado obtido neste item mostra que o critério $p_{crit} / pp > 4$ é verificado para esta esbelteza, apresentado na Figura 5.

Com relação ao comportamento dos resultados obtidos, para a fase de içamento as formulações de Lebelle [6] e Burgoyne [7] apresentam resultados muito próximos de carga crítica, sendo a maior diferença de 7,5%. Comparando os resultados da formulação de Stratford e Burgoyne [7] com o programa LTBeam [16], a diferença máxima é 51,1%.

Já para transporte isto acontece para os resultados de Lebelle [6] e do programa computacional LTBeam [16], com diferença máxima de 7,7% e mínima de 4,7%. A formulação de Stratford e Burgoyne [7] mostra pequena sensibilidade às imperfeições geométricas na fase de transporte, pois a maior diferença entre as cargas críticas com e sem imperfeições é 2,5%.

Na Tabela 6 são comparados os resultados deste item aos do item 3.1. Para este item são considerados os resultados da viga com vão de 20 m.

A partir desta comparação, com o objetivo de apresentar limites de esbelteza, os valores recomendados para vigas retangulares são os obtidos no item 3.1.

Chama-se a atenção que, no caso de vigas com seção retangular

Tabela 6 - Comparação dos resultados de esbeltezes limite de vigas retangulares para os casos analisados

Esbelteza	Item 3.1	Item 3.2
$l_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3}$	85	195
$l_{of} h / b_w^2$	180	750
l_{of} / b_w	60	100
h / b_w	3	7,5

Tabela 7 - Carga crítica de viga I para variação da largura da mesa

h / b _f	l _{0f} h ^{1/3} / b _f ^{4/3}	Carga crítica de instabilidade (kN/m)							
		Lebelle		Stratford et al.		Stratford et al. ¹		LTBeam	
		I ²	T	I	T	I	T	I	T
3,75	116,52	15,56	23,97	17,89	27,18	16,3	26,25	23,80	25,96
2,50	67,86	51,2	41,4	53,3	50,61	41,5	48,04	41,24	45,65
1,88	46,24	105,97	62,29	122,5	82,19	78,6	76,4	63,24	69,29

Notas ¹ Formulação considera imperfeições geométricas ² As letras I e T representam içamento e transporte, respectivamente.

Figura 6 - Carga crítica de viga I para variação da largura da mesa

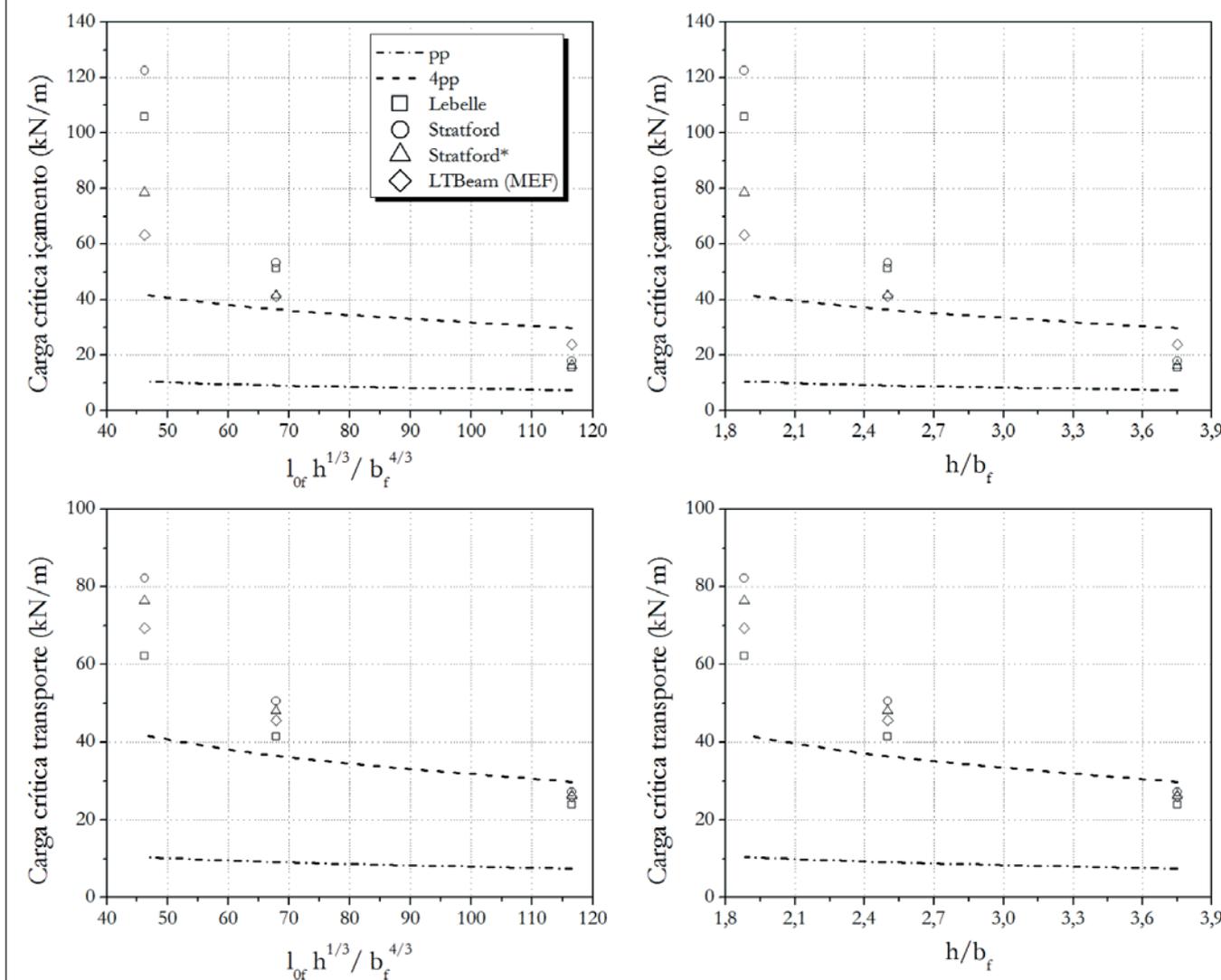


Tabela 8 - Carga crítica de viga I para variação do vão

Vão (m)	$l_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3}$	Carga crítica de instabilidade (kN/m)							
		Lebelle		Stratford et al.		Stratford et al. ¹		LTBeam	
		I ²	T	I	T	I	T	I	T
30	46,24	105,97	62,3	121,84	82,2	78,14	76,36	63,24	69,29
35	53,95	45,40	42,10	55,40	51,75	42,20	48,25	42,25	46,12
40	61,66	23,73	29,86	28,93	34,67	24,27	32,4	29,7	32,31

Notas ¹ Formulação considera imperfeições geométricas ² As letras I e T representam içamento e transporte, respectivamente.

a esbeltez $l_{of} h / b_w^2$ seria de 180 ao passo que pela ABNT NBR 9062:2006 [9] o limite seria de 500, portanto contra a segurança. Para exemplificar o limite encontrado, considera-se uma viga com largura de 40 cm, altura 150 cm e vão de 20 m. Com essas características, sua esbeltez é $l_{of} h^{1/3} / b_w^{4/3} = 77,7$. O limite recomendado pelo *fib* Model Code [13] para vigas em fase transitória é 50, portanto a viga em questão não verifica este critério de segurança. No entanto, a viga verifica a segurança para fases transitórias para o limite obtido no item 3.1 é 85. Vale salientar que os limites obtidos neste artigo tem por base o critério de segurança $p_{crit} / pp > 4$.

3.3 Variação da largura da mesa da viga I

Na Tabela 7 e Figura 6 estão os resultados de carga crítica para variação simultânea da largura da mesa superior e inferior de vigas I em fase transitória. As larguras admitidas são de 40, 60 e 80 cm, sendo a altura, espessura de mesa e alma e vão fixos em 150 cm, 15 cm e 30 m, respectivamente, com a relação $l / h = 20$. Com base nos resultados da Figura 6, verifica-se que para es-

beltezes $l_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} \leq 70$ e $h / b_f \leq 2,5$ todas as formulações apresentam cargas críticas que verificam o critério de segurança para transporte e içamento. A comparação com as normas será feita no item 3.4.

A formulação de Stratford e Burgoyne [7] apresenta comportamento semelhante ao descrito no item 3.1. Em içamento a formulação dos autores se aproxima mais dos resultados do programa computacional LTBeam [16], sendo diferença máxima de 31,5%. Em transporte, os resultados da formulação de Lebelle [6] são semelhantes aos do programa LTBeam [16], com diferença máxima de 10,1%.

3.4 Variação do vão da viga I

A importância da variação do vão para estabilidade de vigas I em fase transitória é verificada neste item. Os resultados seguem na Tabela 8 e Figura 7. Os vão admitidos são de 30, 35 e 40 m, sendo a relação l / h de 20, 23 e 26, respectivamente. São fixas a largura de mesa, espessura de alma e mesa e altura em 80 cm, 15 cm

Figura 7 - Carga crítica de viga I para variação do vão

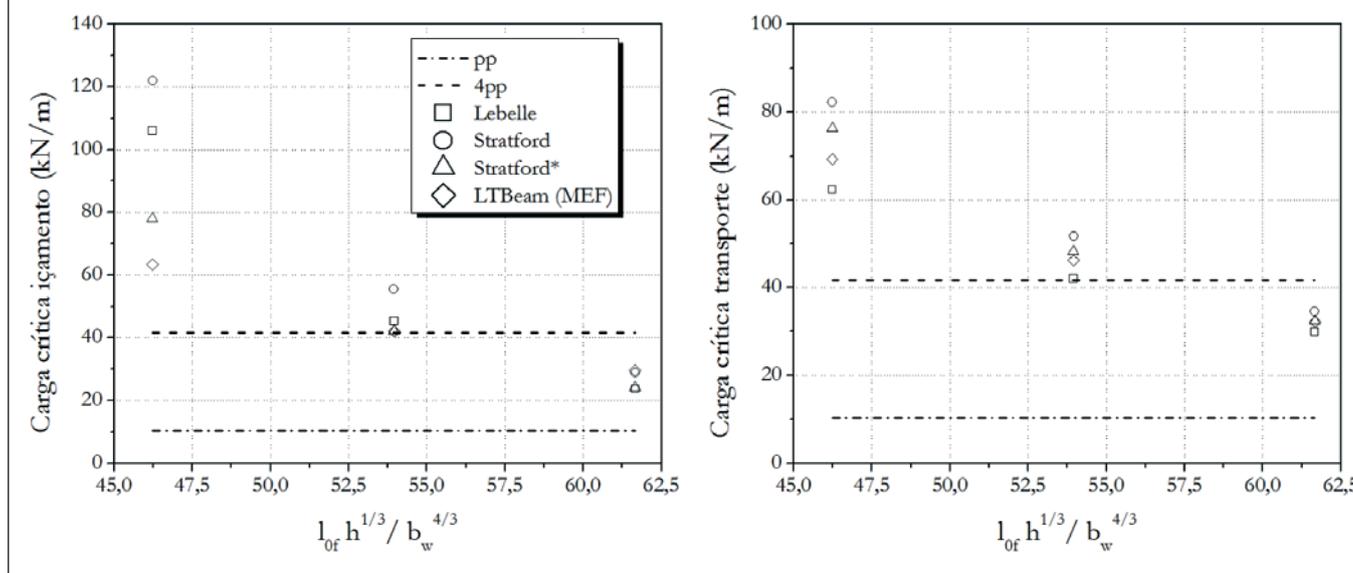


Tabela 9 – Comparação dos resultados de esbeltezes limite para vigas I

Esbeltez	fib Model Code (13)	NBR9062 (9)	ACI 318-02 (12)	BS:8110-1 (14)	Eurocode 2 (11)	Item 3.3	Item 3.4
$\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3}$	50	-	-	-	70	70	53
$\ell_{of} h / b_f^2$	-	500	-	250	-	125	82
ℓ_{of} / b_f	-	50	50	60	-	50	43
h / b_f	-	-	-	-	3,5	2,5	1,88

e 150 cm, respectivamente. Portanto, a relação h / b_f é mantida constante com valor de 1,88.

Na Figura 7, a segurança é verificada para esbeltez $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} \leq 53$ em içamento e transporte. Este resultado é aproximadamente o limite recomendado no *fib* Model Code [13]. A esbeltez $h / b_f \leq 1,8$ só pode ser recomendada se verificar simultaneamente à esbeltez $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3}$.

Ao impor estes limites a favor da segurança, eliminam-se possibilidades de vigas com esbeltezes que tenham segurança em fase transitória, mas que não atendem a estes critérios. Por exemplo, a viga com esbeltez de $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} = 67,8$ apresentada no item 3.3 que atende ao critério de $p_{crit} / pp > 4$.

Os resultados das formulações seguem os padrões descritos nos itens anteriores. Em içamento os resultados da formulação de Stratford e Burgoyne [7] tem diferença máxima de 18,3% para os resultados do programa computacional LTBeam [16]. Em transporte, os resultados da formulação de Lebellet [6] tem diferença máxima de 7,6%, comparados aos obtidos pelo programa LTBeam [16].

Na Tabela 9 são comparados os limites de esbeltez obtidos no item 3.3 e item 3.4 com as recomendações das normas.

De acordo com a Tabela 9, a única norma que apresenta limite de esbeltez a favor da segurança, quando comparado aos resultados obtidos é o *fib* Model Code [13]. Portanto, para vigas I os limites recomendados são os obtidos no item 3.4, igualando a esbeltez $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3}$ ao recomendado pelo código *fib* Modelo.

Como feito no item 3.2 para exemplificar, considera-se agora uma viga I com mesas de 50 cm de largura, espessuras de mesa e alma de 15 cm, altura de 150 cm e vão de 20 m. Sua esbeltez é $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3} = 57,7$. Esta esbeltez não tem segurança verificada pelo limite recomendando no *fib* Model Code [13], nem pelo limite determinado neste artigo.

4. Conclusões

Com base nos resultados das análises paramétricas, pode-se concluir que:

- A partir das análises paramétricas, para a fase de içamento afirma-se que a formulação de Stratford e Burgoyne [7] apresentou os resultados de carga crítica mais próximos aos obtidos pelo programa computacional LTBeam [16], que está sendo utilizado como referência. Para os intervalos de esbeltezes considerados para vigas retangulares e vigas I, a diferença mínima entre as curvas de carga crítica obtidas é de 1,1% e máxima de 64% entre as duas formulações.
- Os resultados de carga crítica da formulação de Lebellet [6] para transporte se aproximaram dos obtidos pelo programa

LTBeam [16]. Entre as esbeltezes consideradas para vigas retangulares e vigas I, a diferença mínima encontrada entre as curvas de carga crítica foi de 4,7% e máxima de 28,4%.

- O limite de esbeltez para vigas de seção retangular é diferente do limite determinado para vigas de seção I. Destaca-se que nenhuma norma faz essa distinção. Com isso, as vigas de seção retangular normalmente resultam excessivamente robustas, sendo que o cálculo de carga crítica mostra que os elementos podem ser mais esbeltas.
- Tomando como referência o *fib* Model Code [13], para os casos analisados, o limite da esbeltez $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3}$ para vigas retangulares seria de 85.
- Já os limites obtidos para vigas I, nos casos analisados, para a esbeltez $\ell_{of} h^{1/3} / b_f^{4/3}$ seria de 53, o que poderia ser tomado igual a 50, conforme recomendado pelo *fib* Model Code [13].
- Nos casos analisados, para vigas I, somente a recomendação do *fib* Model Code [13] atende os limites de esbeltes para às situações analisadas.

Cabe destacar que as conclusões foram obtidas para estudo que envolveu as seguintes situações: f_{ck} de 30 MPa, imperfeição geométrica de $l/300$ (quando considerada), balanços de 2,5 m, cabos de içamento verticais, critério de segurança $p_{crit} / pp > 4$. A rigidez dos vínculos de torção adotados no içamento é 1200 kNm/rad e transporte 1530 kNm/rad.

As relações geométricas utilizadas foram apresentadas na Tabela 3. Lembrando que as espessuras de mesa e alma das vigas I são fixas em 15 cm.

Quando as recomendações das normas e códigos não são atendidas, pode-se recorrer a uma análise mais rigorosa, por exemplo, cálculo de carga crítica de instabilidade lateral. Este tipo de análise considera o efeito da não-linearidade geométrica, característico em elementos delgados. A segurança é então verificada, comparando-se a carga crítica ao peso próprio da viga. A relação entre as duas grandezas deve atender sempre a um critério de segurança, normalmente adota-se o valor 4.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem o departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos e à Capes pela bolsa de mestrado concedida.

6. Referências bibliográficas

- LIMA, M. C. V. Instabilidade lateral das vigas pré-moldadas em serviço e durante a fase transitória, São Carlos, 1995,

- Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 146p.
- [2] LIMA, M. C. V. Contribuição ao estudo da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas, São Carlos, 2002, Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 179 p.
 - [3] EL DEBS, M. K. Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações. São Carlos, EESC-USP - Projeto Reenge, 2000.
 - [4] KRAHL, P. A. Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas em situações transitórias, São Carlos, 2014, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 209 p.
 - [5] TRAHAIR, N. S. Flexural-Torsional Buckling of Structures. London: E. & F. N. Spon, 1993, 360 p.
 - [6] LEBELLE, P. Stabilité élastique des poutres en béton précontraint a l'égard de déversement latéral. Ann. Batiment et des Travaux Publics, v. 141, p. 780–830, 1959.
 - [7] STRATFORD, T. J.; BURGOYNE, C. J.; TAYLOR, H. P. J. Stability design of long precast concrete beams. Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Structures and Bridges, v.134, p.159-168, 1999.
 - [8] SOUTHWELL, R. V. On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability. Proceedings of the Royal Society, v. 135, p. 601–616, 1932.
 - [9] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. - NBR 9062, Rio de Janeiro, 2001.
 - [10] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. NBR 6118, Rio de Janeiro, 2014.
 - [11] EUROPEAN COMMITTEE OF STANDARDIZATION. Design of Concrete Structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. - EUROCODE 2, Brussels, 2004.
 - [12] ACI COMMITTEE 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (318R-02)," American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 2002, 443 pp.
 - [13] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON, *fib* Model Code 2010 - final draft, Vol. 2, Bulletin 66, Lausanne, Switzerland, 2012.
 - [14] BRITISH STANDARDS INSTITUTION, BS 8110. Code of practice for structural use of concrete. London; 1997.
 - [15] TIMOSHENKO, S.; GERE, J. Theory of Elastic Stability. McGraw Hill, New York, 1988, 541p.
 - [16] LTBeam 1.0.10 [Computer software]. Saint-Aubin, France, Centre Technique Industriel Construction Metallique (CTICM).
 - [17] MAST, R. F. Lateral stability of long prestressed concrete beams, part 1. PCI Journal, v. 34, p. 34 53, 1989.