

Determinação experimental de uma lei física linear que correlacione duas grandezas físicas vetoriais

(Experimental resolution of a linear physical law that correlates two vector magnitudes)

Elysio R. F. Ruggeri

Engenheiro Civil - EMOP
Furnas Centrais Elétricas S.A.
E-mail: ruggeri@furnas.com.br

Resumo

Dois grandezas vetoriais, \mathbf{a} e \mathbf{b} , postas em jogo num fenômeno físico e constituindo campos, podem estar relacionadas pela lei $\mathbf{b}=\phi\mathbf{a}$ em que ϕ é uma grandeza diádica (ou tensorial de segunda ordem) constante. Nesse caso, a certo vetor \mathbf{a} corresponde certo vetor \mathbf{b} . A lei só estará determinada após o conhecimento de ϕ , o que se consegue através de medições diretas dessa grandeza. Esse artigo trata da forma de determinação indireta de ϕ , medindo-se, de forma direta (ou, mesmo, indireta), pares de vetores correspondentes \mathbf{a} e \mathbf{b} . As incertezas das medições dos vetores \mathbf{a} 's e \mathbf{b} 's são consideradas através de um exemplo numérico e a incerteza de ϕ pode ser avaliada.

Palavras-chave: Vetor, medição, incerteza.

Abstract

Two vector magnitudes, \mathbf{a} and \mathbf{b} , occurring together in a physical phenomenon, can be related by the law $\mathbf{b}=\phi\mathbf{a}$ where ϕ is a constant dyadic magnitude (or a tensor of second order). In this case, for certain vector \mathbf{a} , there corresponds certain vector \mathbf{b} . The law will only be determined after the establishment of ϕ , which is possible in general by direct measurements of this magnitude. This paper deals with an indirect way to determine ϕ by some direct (or even indirect) measurements of the corresponding vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} . Incertainties of vectors \mathbf{a} and \mathbf{b} are considered by a numerical example and the uncertainty of ϕ can be evaluated.

Keywords: Vector, measurements, uncertainties.

1. Introdução

1.1 Sobre as leis físicas lineares

Os fenômenos físicos se passam em domínios geométricos, D , uni, bi ou tri-dimensionais, supostamente determinados em relação a um dado e conveniente sistema de coordenadas S . Assim, D pode ser uma curva, uma superfície, ou uma região do espaço. Dizemos que D é campo de uma grandeza \mathbf{G} , quando, a cada ponto de D , está associado um e um único valor para \mathbf{G} , seja esta de natureza escalar, vetorial, diádica, etc. A trajetória de um corpo, por exemplo, é campo dos vetores: força atuante, aceleração e velocidade desse corpo.

No caso aqui estudado, ao ponto genérico P de D estão associadas as grandezas representadas pelos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Uma lei física linear que correlacione essas grandezas é de um dos dois tipos seguintes:

$$\mathbf{B} = K\mathbf{a}, \text{ ou } \mathbf{b} = \phi.\mathbf{a} \quad (01)$$

onde K é uma grandeza escalar e ϕ uma grandeza diádica (ou tensorial de ordem 2), ambas não sendo dependentes de \mathbf{a} , nem de \mathbf{b} . As grandezas K e ϕ são, por exemplo, características de um material que ocupe o espaço D , para o qual são válidas as leis (01), ou apenas uma delas. Dizemos, muitas vezes, quando não existe perigo de confusão, que \mathbf{a} e \mathbf{b} constituem campos (a existência de D ficando subentendida). A grandeza representada por ϕ , por não depender do ponto (poderá ser uma constante ou depender do tempo), não constitui um campo.

A principal lei da Mecânica, classicamente representada por $\mathbf{f} = M\mathbf{a}$, é do primeiro tipo, M representando a massa de um corpo. Ainda na Mecânica, a lei da dinâmica do corpo rígido, $\mathbf{j} = \mathbf{I}.\mathbf{w}$, onde \mathbf{j} é o momento angular (ou momento da quantidade de movimento do corpo), \mathbf{w} a velocidade angular do corpo (em torno de um eixo) e \mathbf{I} é o diádico (simétrico) de inércia do corpo, é uma lei do segundo tipo.

Muitos exemplos poderiam ser citados na área da Física. Em Engenharia,

uma lei do segundo tipo é a clássica lei de Darcy de percolação da água nos materiais permeáveis. Nesse caso, o diádico ϕ representa a condutividade hidráulica do material, que, submetido a um gradiente hidráulico \mathbf{b} num ponto, permite a percolação da água com uma velocidade \mathbf{a} (nesse mesmo ponto).

Em muitas situações, especialmente na prática da Engenharia, podemos admitir (por algum motivo que não interessa discutir aqui) a validade das leis (01); mas não se conhecem, de antemão, as grandezas K e ϕ , que, então, devem ser determinadas experimentalmente. Medições envolvendo incertezas em medidas são, portanto, necessárias.

O procedimento utilizado de praxe para a resolução do problema consiste, assim, em se fazerem medidas diversas das grandezas vetoriais \mathbf{a} e \mathbf{b} , quando possível, e tratá-las, estatisticamente, para se determinarem os valores de K e ϕ , que, segundo algum critério adequado (o de minimização do quadrado de alguma norma, por exemplo), melhor se adaptem ao conjunto das medidas.

A lei do tipo $\mathbf{b} = K\mathbf{a}$ diz que os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} devem ser paralelos e que $|\mathbf{b}| = K|\mathbf{a}|$. Com uma série de medições de $|\mathbf{b}|$ e $|\mathbf{a}|$, não será difícil encontrar um valor adequado para K . Se \mathbf{a} e \mathbf{b} deverem ter o mesmo sentido, deverá ser $K > 0$; em caso contrário, será $K < 0$. O problema da determinação da direção comum a \mathbf{a} e \mathbf{b} não é, assim, de solução imediata, mas um tratamento adequado dos dados resolverá o problema com alguma facilidade (o que não nos interessa no presente).

A lei do tipo $\mathbf{b} = \phi.\mathbf{a}$ é, evidentemente, mais complexa que a anterior. Nesse estudo, mostraremos como encontrar boas determinações de ϕ mediante certos pressupostos. Quando ϕ não apresenta particularidades, a solução é mais simples; mas, em geral, nas leis físicas, ϕ é um diádico simétrico ($\phi = \phi^T$), o que exige um condicionamento a mais na formulação da solução. Além disso, devemos notar que, na Física, as grandezas vetoriais \mathbf{a} e \mathbf{b} têm o mesmo status, isto é, tanto podemos expressar \mathbf{b} em função de \mathbf{a} , como \mathbf{a} em função de \mathbf{b} . Isto significa que ϕ deve ser invertível, ou completo, devendo, pois, ter terceiro (ou determinante) diferente de zero ([1], [2]). Devemos considerar, ainda, que as medidas dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} devem ser feitas, geralmente, pelas “coordenadas” desses vetores em relação a um mesmo sistema de referência, por exemplo, S . Nesse caso, podemos dar à forma $\mathbf{b} = \phi.\mathbf{a}$ de representação da lei, forma essa que independe de qualquer sistema de referência, uma representação matricial válida apenas no sistema S . Em relação a esse sistema, os vetores poderão ser representados por suas coordenadas organizadamente dispostas em matrizes-colunas 3×1 ; e o diádico ϕ , por uma matriz simétrica e invertível 3×3 .

Nas condições expostas, a lei $\mathbf{b} = \phi.\mathbf{a}$ pode ser entendida de dois modos, úteis em muitas situações. No modo algébrico, vemos um conjunto de três números variáveis - as coordenadas A_1, A_2, A_3 de \mathbf{a} - se transformar em um conjunto de três outros números, também variáveis - as coordenadas B_1, B_2, B_3 de \mathbf{b} - mediante a matriz constante $[\phi]$ associada à grandeza ϕ , de elementos ϕ_{ij} ; e escrevemos:

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}, \text{ com } \phi_{ij} = \phi_{ji} \text{ (i, j = 1, 2, 3)} \quad (02)$$

Conforme mencionamos, fazendo diversas medições dos pares de ternos A_i e B_j , deveremos determinar o conjunto dos seis números: $\phi_{11}, \phi_{12} = \phi_{21}, \phi_{13} = \phi_{31}, \phi_{23} = \phi_{32}, \phi_{22}$ e ϕ_{33} , que satisfaz (02).

No modo geométrico podemos entender a lei $\mathbf{b} = \phi.\mathbf{a}$ como a transformação linear do vetor \mathbf{a} do espaço no vetor \mathbf{b} do espaço, mediante o operador ϕ ; ou, em relação ao ponto P , como a transformação (linear) da extremidade do vetor \mathbf{a} (suposto aplicado

em P), na extremidade do vetor **b** (também suposto aplicado em P). Visto de outra forma, poderemos sempre fazer a imagem de todos os vetores **a** e **b** (dos campos já definidos) aplicados em um mesmo ponto arbitrário do espaço (eventualmente exterior a D). As extremidades dos vetores **a** e **b** ocupariam cada uma região do espaço - a hodógrafa do vetor; diríamos que essas hodógrafas se correspondem linearmente mediante o operador ϕ^1 .

1.2 Um teorema fundamental

Suponhamos, agora, que, de alguma forma, sejam conhecidos três pares de vetores: $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ e $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3)$, que devam estar correlacionados mediante a lei geral $\mathbf{b} = \phi \cdot \mathbf{a}$, cujo operador (simétrico e invertível) pretendemos determinar. Vamos considerar, inicialmente, que todos os vetores tenham sido determinados com precisão, sem erros. Nestas condições, podemos aplicar aos conjuntos um teorema clássico da Álgebra dos Diádicos ([1], [2], [3]), sintetizado pela expressão seguinte:

$$\text{se } \mathbf{b}_i = \phi \cdot \mathbf{a}_i \text{ com } i=1,2,3, \text{ e } (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) \neq 0, \text{ então: } \phi = \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i^1 \quad (03)$$

onde os \mathbf{a}^i são os vetores recíprocos dos \mathbf{a}_i .

Vemos por (03) que, não havendo erros na determinação dos pares $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$, o diádico simétrico ϕ está determinado. Como, por hipótese, os \mathbf{b}_i são independentes, ϕ é completo.

Cabe registrar que o teorema sintetizado por (03) é geral, não exigindo que ϕ seja simétrico. Por outro lado, se $\phi = \phi^T$, seu vetor é nulo (e reciprocamente), isto é,

$$\phi = \phi^T \Leftrightarrow \phi \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}_i \times \mathbf{a}_i^1 = \mathbf{0} \quad (04)$$

o que nos leva a concluir que, nesse caso, os ternos $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ não são totalmente arbitrários.

Consideremos o terno de vetores \mathbf{a}_i : (1;0;1), (2;1;-1), (0;1;2) e o de vetores \mathbf{b}_i : (2;0;5), (-4;1;3), (7;-4;3), ambos referidos ao sistema S. Os recíprocos dos \mathbf{a} 's, referidos ao mesmo sistema, são: (3;-4;2)/5, (1;2;-1)/5, (-1;3;1)/5. Então,

$$[\phi] = \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (05)$$

A verificação da expressão (02) pode ser feita imediatamente, multiplicando-se $[\phi]$ pelas colunas dos \mathbf{b} 's.

A situação anteriormente apresentada é perfeita do ponto de vista matemático. Na realidade, em vista da necessidade de medições das grandezas, medições essas realizadas por pessoas, seguindo algum método e utilizando instrumentos e equipamentos, aquelas medidas dos vetores são infestadas de erros, isto é, as medidas são incertas. Suponhamos, então, que aqueles mesmos vetores, agora incertos e denotados por \mathbf{a}_{medi} e \mathbf{b}_{medi} , tenham as seguintes coordenadas:

$$\mathbf{a}_{\text{medi}1} \equiv (0,97;0;1,02), \mathbf{a}_{\text{medi}2} \equiv (2,02;0,97;-0,99), \mathbf{a}_{\text{medi}3} \equiv (0;1,05;1,94) \text{ e}$$

$$\mathbf{b}_{\text{medi}1} \equiv (1,90;0;5,25), \mathbf{b}_{\text{medi}2} \equiv (-3,94;1,03;2,82), \mathbf{b}_{\text{medi}3} \equiv (5,61;-4,08;3,21).$$

Os \mathbf{a} 's apresentam perturbações da ordem de 5%, para mais ou para menos; e os \mathbf{b} 's, da ordem de 7%.

Como o produto misto dos novos \mathbf{a} 's é diferente de zero (ele é igual a 4,997), eles são independentes e admitem os recíprocos:

$$\mathbf{a}_{\text{medi}1}^1 \equiv (0,58;-0,78;0,42),$$

$$\mathbf{a}_{\text{medi}2}^2 \equiv (0,21;0,38;-0,20),$$

$$\mathbf{a}_{\text{medi}3}^3 \equiv (-0,20;0,60;0,19).$$

Ao aplicarmos o teorema expresso por (03) e seguirmos os mesmos passos de cálculo anteriormente apresentados, encontramos:

$$[\phi_{\text{medi}}] = \begin{bmatrix} -1,022 & 0,961 & 2,834 \\ 1,028 & -2,077 & -0,977 \\ 3,033 & -1,117 & 2,254 \end{bmatrix} \quad (05_1)$$

Vê-se, assim, que as perturbações nas medidas destruíram a esperada simetria que a matriz $[\phi_{\text{medi}}]$ deveria apresentar. Sendo absolutamente necessário que a matriz-solução do problema seja simétrica, dever-se-á procurar algum método convincente, que, tornando-a simétrica, aproxime-a do seu verdadeiro valor dado por (05). Nesse caso, se essa matriz existir e se for determinada, ela deverá ser a que melhor se adapte ao conjunto das medidas efetuadas dos vetores \mathbf{a} 's e \mathbf{b} 's.

2. Uma solução analítica para o problema

Como as medidas \mathbf{a}_{medi} e \mathbf{b}_{medi} estão infestadas de erros, por melhor que seja a determinação do diádico ϕ , para a escrita da lei, deveremos escrever, para duas medidas quaisquer, $\mathbf{b}_i = \phi \cdot \mathbf{a}_i + \mathbf{d}_i$ e $\mathbf{b}_j = \phi \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{d}_j$ para $i, j=1,2,3$, os vetores \mathbf{d}_i e \mathbf{d}_j representando vetores-erros, que, idealmente, permitem escrever as igualdades. Esses vetores-erros são, pois, $\mathbf{d}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \cdot \phi$ e $\mathbf{d}_j = \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j \cdot \phi$, notando-se que, na primeira expressão, levamos em consideração que, por ser $\phi = \phi^T$, $\phi \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \cdot \phi$. O produto escalar dos vetores-erros é, então:

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j - \mathbf{b}_i \cdot \phi \cdot \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i \cdot \phi \cdot \mathbf{b}_j + \mathbf{a}_i \cdot \phi^2 \cdot \mathbf{a}_j$$

¹ Decorreria disso uma série de propriedades. Por exemplo: três pontos colineares numa região seriam colineares na outra; um fragmento de plano numa região seria um fragmento de plano na outra, etc.

Vamos procurar um diádico (simétrico) que torne mínimos todos os produtos escalares dos vetores-erros. Isto significa que, para $i=j$, estamos minimizando as normas dos vetores-erros e que, para $i \neq j$, que eles (não nulos) tendem a ser ortogonais entre si (para que seu produto escalar se anule).

Para tal, devemos igualar ao diádico nulo, \mathbf{O} , a derivada da expressão do produto escalar em relação ao diádico Φ . Tem-se, conforme as regras do Cálculo Poliádico ([3]):

$$\frac{d\Phi}{d\Phi} = {}^4\mathbf{I} \text{ e } \frac{d\Phi^2}{d\Phi} = \Phi \cdot {}^4\mathbf{I} + {}^4\mathbf{I} \cdot \Phi.$$

Logo

$$\mathbf{b}_i \cdot {}^4\mathbf{I} \cdot \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_i \cdot {}^4\mathbf{I} \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i \cdot (\Phi \cdot {}^4\mathbf{I} + {}^4\mathbf{I} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{a}_j$$

Sendo $\mathbf{b}_i \cdot {}^4\mathbf{I} \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i$ e, logo

$$\mathbf{a}_i \cdot (\Phi \cdot {}^4\mathbf{I} + {}^4\mathbf{I} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i \cdot \Phi + \Phi \cdot \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i,$$

$$\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i \cdot \Phi + \Phi \cdot \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i, \quad (06)$$

Relembrando que Φ deve ser simétrico ($\Phi = \Phi^T$) e observando que $(\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i \cdot \Phi) = \Phi \cdot \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i = (\Phi \cdot \mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{a}_i = (\Phi \cdot \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_j = \Phi \cdot \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i$, deduzimos, tomando o escalar em (06): $\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\Phi \cdot \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i$. Pós-justapondo a ambos os membros dessa igualdade a dádade $\mathbf{a}^i \mathbf{a}^i$, agrupando-a convenientemente e somando-a em i e j , vem: $\mathbf{a}^i (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{b}_i) \mathbf{a}^i + \mathbf{a}^i (\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i = 2\Phi \cdot \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i = 2\Phi$, ou, finalmente,

$$\Phi = \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \mathbf{a}^i + \mathbf{a}^i \mathbf{b}_i) \quad (07)$$

O diádico $\Phi_{\text{med}} = \mathbf{b}_i \mathbf{a}^i$ pode ser calculado com os vetores medidos \mathbf{b}_{medi} e \mathbf{a}_{medi} , tal como fora feito aplicando o teorema sintetizado por (03); seria o diádico tal que $\mathbf{b}_{\text{medi}} = \Phi_{\text{med}} \cdot \mathbf{a}_{\text{medi}}$ (sem erros). No exemplo numérico anteriormente apresentado, o diádico é representado pela matriz (05). O diádico Φ_{med} não é simétrico certamente, mas, conforme (07), o diádico que nos interessa (o procurado) deve ser a sua parte simétrica, isto é,

$$\Phi = \frac{1}{2} (\Phi_{\text{med}} + \Phi_{\text{med}}^T) \quad (08)$$

Este é, pois, o diádico simétrico que melhor se ajusta ao conjunto dos vetores medidos segundo o critério adotado, mas o faz com uma incerteza dada pela parte anti-simétrica de Φ_{med} , pois

$$\Phi_{\text{med}} = \Phi + \frac{1}{2} (\Phi_{\text{med}} - \Phi_{\text{med}}^T); \text{ isto é,}$$

$$\text{Incerteza de } \Phi = \frac{1}{2} (\Phi_{\text{med}} - \Phi_{\text{med}}^T) \quad (08_1)$$

A incerteza de Φ será tanto menor quanto menor for a norma de sua incerteza.

3. Aplicação numérica para pequenas perturbações

Para o caso do exemplo numérico apresentado, com pequenas perturbações, tem-se:

$$[\Phi] = \frac{1}{2} ([\Phi_{\text{med}}] + [\Phi_{\text{med}}]^T) = \begin{bmatrix} -1,022 & 0,995 & 2,933 \\ 0,995 & -2,077 & -1,047 \\ 2,933 & -1,047 & 2,254 \end{bmatrix} \quad (09)$$

A incerteza de $[\Phi]$ é dada pela matriz

$$[\text{Incerteza } \Phi] = \frac{1}{2} ([\Phi_{\text{med}}] - [\Phi_{\text{med}}]^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0,033 & 0,100 \\ -0,033 & 0 & 0,070 \\ -0,100 & -0,070 & 0 \end{bmatrix} \quad (09_1)$$

cuja norma é igual a 0,0319.

Se $[\Phi]$ é uma avaliação adequada, conforme o critério adotado, então $\mathbf{b}_{\text{calci}} = [\Phi] \cdot \mathbf{a}_{\text{medi}}$. Assim,

$$\{\mathbf{b}_{\text{calci}}\} = \begin{bmatrix} 2,000 \\ -0,103 \\ 5,145 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{b}_{\text{calci}2}\} = \begin{bmatrix} -4,005 \\ 1,031 \\ 2,679 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \{\mathbf{b}_{\text{calci}3}\} = \begin{bmatrix} 6,735 \\ -4,212 \\ 3,274 \end{bmatrix},$$

são melhores avaliações para $\mathbf{b}_{\text{medi}1}$, $\mathbf{b}_{\text{medi}2}$ e $\mathbf{b}_{\text{medi}3}$, respectivamente, às quais correspondem os vetores-erros:

$\mathbf{d}_1 \equiv (-0,10; 0,10; 0,10)$, $\mathbf{d}_2 \equiv (0,07; -0; 0,141)$, $\mathbf{d}_3 \equiv (-0,26; 0,13; -0,06)$, de normas respectivamente iguais a 0,032, 0,024 e 0,072. Os ângulos formados por esses vetores podem ser determinados com facilidade; o de \mathbf{d}_1 com \mathbf{d}_2 é de 73° , o de \mathbf{d}_2 com \mathbf{d}_3 é de 125° e o de \mathbf{d}_3 com \mathbf{d}_1 é de 52° .

$$\text{Sendo } [\Phi_{(1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} -0,374 & -0,344 & 0,327 \\ -0,344 & -0,707 & 0,120 \\ 0,327 & 0,120 & 0,073 \end{bmatrix}, \text{ podemos obter, tam-}$$

bém, melhores avaliações: $\mathbf{a}_{\text{calci}1}$, $\mathbf{a}_{\text{calci}2}$ e $\mathbf{a}_{\text{calci}3}$ para os \mathbf{a} 's medidos; sendo $\{\mathbf{a}_{\text{calci}}\} = [\Phi]^{-1} \cdot \{\mathbf{b}_{\text{medi}}\}$, encontramos:

$$\{\mathbf{a}_{\text{calci}}\} = \begin{bmatrix} 1,006 \\ -0,026 \\ 1,007 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{a}_{\text{calci}2}\} = \begin{bmatrix} 2,042 \\ 0,965 \\ -0,958 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \{\mathbf{a}_{\text{calci}3}\} = \begin{bmatrix} 0,018 \\ 1,027 \\ 1,877 \end{bmatrix}.$$

Os vetores-erros correspondentes e os respectivos ângulos poderiam ser avaliados como anteriormente.

4. Ampliação do método

Suponhamos que fosse viável a determinação de $M > 3$ pares de vetores correspondentes (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Poderia haver, entre eles, até C_M^3 ternos com vetores \mathbf{a} 's linearmente independentes, mas, por hipótese, existe, pelo menos, um terno nessas condições.

Uma primeira alternativa para a resolução do problema consiste em se selecionarem os N ternos de pares que apresentem \mathbf{a} 's linearmente independentes (logo, $1 \leq N \leq C_M^3$) e com cada terno determinar-se uma matriz como indicado anteriormente. Far-se-ia, em seguida, uma estatística com essas matrizes, determinando-se uma matriz média e uma matriz de variância/covariância.

Uma segunda alternativa consiste em tratar os dados simultaneamente, determinando-se uma única matriz (simétrica) que melhor se ajuste aos dados. Como visto, a cada medição corresponde uma equação da forma $\mathbf{d}_j = \mathbf{b}_j - \phi \cdot \mathbf{a}_j$ para $j=1, 2, \dots, M$. Em geral, para facilidade das medições, esses vetores estão referidos a uma base ortonormada e são representados por suas coordenadas, isto é, a equação vetorial pode ser representada por uma equação matricial da forma $\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{b}\} - [\phi] \cdot \{\mathbf{a}\}$, onde $\{\mathbf{d}\}$, $\{\mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{a}\}$ são matrizes-colunas 3×1 ($\{\mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{a}\}$ sendo conhecidas e $[\phi]$ - a incógnita - uma matriz simétrica 3×3). O conjunto dessas M equações pode ser representado na forma compacta $[\mathbf{d}] = [\mathbf{B}] - [\phi] \cdot [\mathbf{A}]$, sendo $[\mathbf{d}]$, $[\mathbf{B}]$ e $[\mathbf{A}]$ de ordem $3 \times M$. As colunas de $[\mathbf{B}]$ são formadas com as coordenadas dos vetores \mathbf{b} 's; da mesma forma, as colunas de $[\mathbf{A}]$ são formadas com os vetores \mathbf{a} 's. Então, se $[\mathbf{d}]^T$ é a transposta de $[\mathbf{d}]$:

$$[\mathbf{d}]^T \cdot [\mathbf{d}] = [\mathbf{D}] = [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{B}] - [\mathbf{B}]^T \cdot [\phi] \cdot [\mathbf{A}] - [\mathbf{A}]^T \cdot [\phi] \cdot [\mathbf{B}] + [\mathbf{A}]^T \cdot [\phi]^2 \cdot [\mathbf{A}] \quad (10)$$

a ordem de $[\mathbf{D}]$ sendo $M \times M$. Os elementos da diagonal principal de $[\mathbf{D}]$ representam as normas dos vetores-erros; os demais representam os produtos escalares desses vetores. Podemos procurar a matriz simétrica $[\phi]$, que torne a matriz $[\mathbf{D}]$ tão próxima da matriz zero $M \times M$, quanto possível. Isto significa que, para esse valor de $[\phi]$, a derivada de $[\mathbf{D}]$ em relação a $[\phi]$ deve ser nula, ou seja, que

$$2[\mathbf{A}]^T \cdot [\phi] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{A}] + [\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{B}] \quad (11)$$

A matriz simétrica 3×3

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}]^T \quad (12)$$

é regular, porque, por hipótese, pelo menos três entre os vetores \mathbf{a} 's são linearmente independentes (ver apêndice I). Pré-multiplicando (11) por $[\mathbf{A}]$, pós-multiplicando por $[\mathbf{A}]^T$, vem:

$$2[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}]^T \cdot [\phi] \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}]^T + [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{A}]^T, \quad (13)$$

de onde deduzimos, pré e pós-multiplicando ambos os membros por \mathbf{S}^{-1} :

$$[\phi] = ([\mathbf{S}]^{-1} \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}]^T + [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{S}]^{-1}) / 2 \quad (13)$$

Pondo

$$[\psi] = [\mathbf{S}]^{-1} \cdot [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}]^T, \text{ donde } [\psi]^T = [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{A}]^T \cdot [\mathbf{S}]^{-1} \quad (14)$$

resulta, finalmente,

$$[\phi] = ([\psi] + [\psi]^T) / 2 \quad (15)$$

Se não houvesse incertezas, a matriz $[\psi]$ seria a solução do problema, pois seria simétrica. A incerteza com que é determinada $[\psi]$, isto é, a sua parte anti-simétrica, pode ser transferida para a matriz $[\phi]$; assim,

$$[\text{Inc } \phi] = ([\psi] - [\psi]^T) / 2 \quad (16)$$

4.1 Um exemplo numérico

Aos dados do exemplo numérico apresentado no item 3 (três vetores \mathbf{a} 's linearmente independentes), vamos juntar o novo par de medidas dos vetores: $\mathbf{a}_{\text{med4}} \equiv (2,07; 2,91; 1,02)$ e $\mathbf{b}_{\text{med4}} \equiv (3,80; -5,15; 5,30)$, caso em que $M = 4$ e $1 \leq N$. Então,

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0,97 & 2,02 & 0 & 2,07 \\ 0 & 0,97 & 1,05 & 2,91 \\ 1,02 & -0,99 & 1,94 & 1,02 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1,90 & -3,94 & 5,61 & 3,80 \\ 0 & 1,03 & -4,08 & -5,15 \\ 5,25 & 2,82 & 3,21 & 5,30 \end{bmatrix}.$$

Logo, considerando (12) e (14):

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} 9,306 & 7,983 & 1,101 \\ 7,983 & 10,512 & 4,045 \\ 1,101 & 4,045 & 6,825 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{S}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,399 & -0,361 & 0,149 \\ -0,361 & 0,449 & -0,208 \\ 0,149 & -0,208 & 0,246 \end{bmatrix} e$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} -0,959 & 1,045 & 3,041 \\ 0,979 & -2,160 & -1,131 \\ 2,592 & -0,968 & 2,260 \end{bmatrix}.$$

A matriz ϕ que melhor se ajusta ao conjunto das quatro medidas e sua incerteza são, assim, conforme (15) e (16):

$$[\phi] = \begin{bmatrix} -0,959 & 1,012 & 2,817 \\ 1,012 & -2,160 & -1,050 \\ 2,817 & -1,050 & 2,260 \end{bmatrix} e$$

$$[\text{Inc } \phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0,030 & 0,224 \\ -0,030 & 0 & -0,082 \\ -0,224 & 0,082 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A matriz obtida, $[\phi]$, pode ser comparada com a matriz não perturbada (05), levando-se em conta os percentuais de perturbação praticados (até 5% para os \mathbf{a} 's e até 7% para os \mathbf{b} 's).

5. Resumo e conclusões

Sendo certo que a lei representativa do fenômeno em estudo é do tipo linear, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{a}$, com $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^T$, pretende-se determinar a matriz simétrica associada ao diádico $\boldsymbol{\phi}$ em relação a uma base escolhida. Para isso, é necessário que sejam efetuadas as medidas de três pares de vetores (\mathbf{b}, \mathbf{a}), cada par relativo a um ponto do domínio em que ocorre o fenômeno, com a condição adicional de que os vetores \mathbf{a} 's sejam linearmente independentes. Seguindo-se, então, o roteiro apresentado, chega-se à matriz-solução do problema.

Ora, existindo incerteza nas medidas efetuadas, para se determinarem os vetores, existirá, também, uma incerteza na matriz calculada, associada à grandeza $\boldsymbol{\phi}$. Podemos conhecer as incertezas com que são medidos os vetores, pois estas são funções dos métodos e instrumentos utilizados para as determinações; mas não dispomos, ainda, de argumentos que permitam correlacionar a incerteza de $\boldsymbol{\phi}$ com as incertezas dos \mathbf{a} 's e dos \mathbf{b} 's. Os valores obtidos para $[\boldsymbol{\phi}]$ mostram que seus elementos podem estar determinados com incerteza igual à soma das incertezas dos vetores, mas isso poderá não ser válido, se as incertezas dos vetores forem maiores.

6. Referências bibliográficas

1. WILSON, E. B. *Vector analysis*. New Haven: Yale University Press, 1902. 436p.
2. MOREIRA, L. C. de A. Diádicos. *REM - Revista Escola de Minas*, v. 25, n.3, 1966.
3. RUGGERI, E. R. F. *Tratado de Cálculo Poliádico*. Dois tomos. (Em preparação).

APÊNDICE I

Para provar que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ é regular, basta expressar os quatro vetores \mathbf{a} 's na base definida pelos três primeiros. Nesse caso, se $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ é o sistema recíproco de $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, então

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1)^2 & (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2) & (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3) \\ (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2) & 1 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2)^2 & (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3) \\ (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3) & (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2)(\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3) & 1 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3)^2 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, encontra-se o valor $1 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^1)^2 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^2)^2 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{a}^3)^2$, trivialmente diferente de zero.

No caso de dispormos de cinco ou mais medidas, poderíamos demonstrar a não nulidade do determinante de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, seguindo caminho idêntico, não sem um trabalho substancial a mais.

Artigo recebido em 13/02/2006 e aprovado em 11/05/2007.

