

Estados estacionários de partículas sem spin em potenciais quadrados (Stationary states of spinless particles in square potentials)

Tatiana R. Cardoso e Antonio S. de Castro¹

*Departamento de Física e Química, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho,
Guaratinguetá, SP, Brasil*

Recebido em 5/11/2007; Aceito em 22/1/2008; Publicado em 1/8/2008

A equação de Klein-Gordon em uma dimensão espacial é investigada com a mais geral estrutura de Lorentz para os potenciais externos. A análise e o cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão para o espalhamento de partículas em um potencial quadrado, com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar, revelam circunstâncias que conflitam com as previsões da mecânica quântica não-relativística. Mostra-se que tais espalhamentos anômalos são mediados por estados ligados de antipartículas, ainda que as partículas incidentes tenham baixas energias. A análise dos estados ligados também revela resultados surpreendentes, destacando-se a inibição do efeito Schiff-Snyder-Weinberg pela presença de um acoplamento escalar.

Palavras-chave: equação de Klein-Gordon, partículas sem spin, paradoxo de Klein, produção de pares, efeito Schiff-Snyder-Weinberg.

The one-dimensional Klein-Gordon equation is investigated with the most general Lorentz structure for the external potentials. The analysis and calculation of the reflection and transmission coefficients for the scattering of particles in a square potential, with an arbitrary mixing of vector and scalar couplings, reveal circumstances which conflict with the predictions from nonrelativistic quantum mechanics. It is shown that such anomalous scatterings are mediated by antiparticle bound states, even if the incident particles have low energies. The analysis of bound states also reveals surprising results, remarkable is the inhibition of the Schiff-Snyder-Weinberg effect due to the presence of a scalar coupling.

Keywords: Klein-Gordon equation, spinless particles, Klein's paradox, pair production, Schiff-Snyder-Weinberg effect.

1. Introdução

O espalhamento de partículas em potenciais quadrados é um excelente laboratório nos cursos introdutórios da teoria quântica. Isto acontece não apenas pela simplicidade dos cálculos algébricos envolvendo os potenciais constantes por partes mas também pela riqueza de conceitos físicos que podem ser apreendidos. Mais ainda, os potenciais quadrados servem de modelo para uma diversidade de situações realísticas, tais como o decaimento alfa, o diodo túnel e o microscópio de tunelamento.

No âmbito da mecânica quântica relativística espera-se que haja pequenas correções aos resultados obtidos pela equação de Schrödinger no caso de potenciais fracos. No caso de potenciais fortes, espera-se por resultados peculiares devido às manifestações das antipartículas. O espalhamento relativístico de partículas por barreiras de potenciais quadradas com acoplamento puramente vetorial tem sido estudado com a equação de

Dirac [1-4], e também com a equação de Klein-Gordon (EKG) [1]. Em ambos os casos, observa-se transmissão ressonante para barreiras suficientemente altas, quando então a mecânica quântica não-relativística prevê a supressão exponencial do coeficiente de transmissão. Tal transmissão ressonante relativística é associada com o processo de criação de pares partícula-antipartícula na região de interação. Os estados ligados da equação de KG, porém, diferem radicalmente daqueles da equação de Dirac. Para poços de potenciais vetoriais estreitos e profundos o bastante, a equação de KG ostenta o fenômeno conhecido na literatura como efeito Schiff-Snyder-Weinberg (SSW) [5]. Tal efeito manifesta-se pelo surgimento de estados ligados de antipartículas adicionais num potencial que é atrativo somente para partículas. Para profundidades críticas, os níveis de energia dos estados ligados de partículas e antipartículas coalescem e aí se descortina um novo canal para a produção espontânea de pares partícula-antipartícula. Popov [6] advogou que o efeito

¹E-mail: castro@pesquisador.cnpq.br.

SSW é característico de potenciais de curto alcance e que não deveria ser esperado para potenciais de longo alcance. Contudo, Klein e Rafelski [7] usaram um suposto efeito SSW em um poço coulombiano para especular sobre a condensação de Bose e a estabilidade de núcleos com números atômicos extremamente altos e, de imediato, foram severamente criticados [8]. De fato, a investigação dos estados ligados da equação de KG com diferentes formas funcionais para os potenciais vetoriais confirmam a suposição de Popov [9-12].

Na Ref. [13] analisamos a EKG unidimensional com interações externas com a mais geral estrutura de Lorentz, *i.e.*, consideramos potenciais com estrutura vetorial, com componentes espacial e temporal, acrescido de uma estrutura escalar.² Em seguida exploramos as soluções para o espalhamento de partículas em um potencial degrau com acoplamento geral, por assim dizer, com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar. Verificamos que tal mistura de acoplamentos conduz a resultados surpreendentes. Para além de aumentar o limiar de energia para a produção espontânea de pares, podendo até mesmo frustrar a produção ainda que os potenciais sejam extremamente fortes, a presença de um acoplamento escalar permite que uma partícula possa ser localizada em uma região do espaço arbitrariamente pequena sem ameaçar a interpretação de partícula única da EKG. A aparente violação do princípio da incerteza foi remediada com a introdução do conceito de comprimento de onda Compton efetivo.

O propósito do presente trabalho é dar seguimento ao estudo da EKG unidimensional levado a cabo na Ref. [13] onde a mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar mostrou-se profícua.³ Desta feita analisamos os estados estacionários em um potencial quadrado. Calculamos os coeficientes de reflexão e transmissão e obtemos resultados que contradizem a intuição baseada na mecânica quântica não-relativística, tanto para uma barreira de potencial quanto para um poço de potencial, e que só podem ser explicados pela mediação de antipartículas. A análise do efeito túnel relativístico nos conduz à conclusão que o paradoxo de Klein, usualmente relacionado com a emissão de antipartículas por potenciais suficientemente intensos, não é necessariamente relacionado com a irradiação de antipartículas. Isto dito tendo em vista que, apesar da formação de estados ligados de antipartículas na região de interação, induzida pelas partículas incidentes, somente partículas são, de fato, irradiadas. A investigação dos estados ligados permite-nos concluir sobre a influência de um contaminante escalar no efeito SSW. Verifica-se que a presença de um acoplamento escalar inibe o efeito SSW,

²O potencial escalar é acoplado à partícula de acordo com a prescrição $m \rightarrow m + V_s/c^2$. Este tipo de acoplamento tem sido utilizado para facultar o confinamento de férmions no modelo de quarks, para dar conta da apropriada intensidade da interação spin-órbita na descrição da estrutura nuclear, e uma massa efetiva dependente da posição na física do estado sólido relativística.

³Embora apresentem facetas dessemelhantes, os acoplamentos vetorial e escalar são indistinguíveis no limite não-relativístico da teoria.

⁴Veja, *e.g.*, Refs. [1] e [5].

e o torna inviável se o acoplamento escalar exceder o acoplamento vetorial.

2. Solução da equação de Klein-Gordon para um potencial quadrado

Na Ref. [13] mostramos que a EKG unidimensional para uma partícula livre de massa de repouso m , na presença de potenciais externos independentes do tempo, admite soluções da forma

$$\Phi(x, t) = \phi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (1)$$

onde ϕ obedece a uma equação similar em forma à equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{V_s^2 - V_t^2}{2mc^2} + V_s + \frac{E}{mc^2} V_t \right) \phi = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \phi. \quad (2)$$

A densidade e a corrente correspondentes à solução expressa pela Eq. (1) tornam-se

$$\rho = \frac{E - V_t}{mc^2} |\phi|^2, \quad J = \frac{\hbar}{2im} \left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi^*}{\partial x} \phi \right). \quad (3)$$

Vamos agora considerar a EKG com os potenciais externos independentes do tempo na forma de um potencial quadrado. O potencial quadrado é expresso como

$$V(x) = V_0 [\theta(x+a) - \theta(x-a)] = \begin{cases} 0 & \text{para } |x| > a \\ V_0 & \text{para } |x| < a, \end{cases} \quad (4)$$

onde $a > 0$ e $\theta(x)$ é a função de Heaviside. $V_0 > 0$ para uma barreira de potencial e $V_0 < 0$ para um poço de potencial. Os potenciais vetorial e escalar são escritos como $V_t(x) = g_t V(x)$ e $V_s(x) = g_s V(x)$ de tal forma que as constantes de acoplamento estão sujeitas ao vínculo $g_t + g_s = 1$, com $g_t \geq 0$ e $g_s \geq 0$.

Para $x < -a$, a EKG apresenta a solução geral

$$\phi = A_+ e^{+ikx} + A_- e^{-ikx}, \quad (5)$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{\hbar c}. \quad (6)$$

Para $|E| > mc^2$, a solução expressa pela Eq. (5) reverte-se em uma soma de autofunções do operador momento e descrevem ondas planas propagando-se em ambos os sentidos do eixo X com velocidade de grupo⁴

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}, \quad (7)$$

igual à velocidade clássica da partícula. Se escolhermos partículas incidindo sobre a região de potencial ($E > mc^2$) teremos que $A_+ e^{+ikx}$ descreve partículas incidentes ($v_g = c^2 \hbar k / E > 0$), enquanto $A_- e^{-ikx}$ descreve partículas refletidas ($v_g = -c^2 \hbar k / E < 0$). Os papéis das ondas serão invertidos se considerarmos a incidência de antipartículas. Doravante, por motivos de simplicidade e sem perda de generalidade, consideraremos apenas a incidência de partículas. A corrente nesta região do espaço, correspondendo a ϕ dada pela Eq. (5), é expressa por

$$J = J_{\text{inc}} - J_{\text{ref}}, \quad (8)$$

onde

$$J_{\text{inc}} = \frac{\hbar k}{m} |A_+|^2, \quad J_{\text{ref}} = \frac{\hbar k}{m} |A_-|^2. \quad (9)$$

Observe que a relação $J = \rho v_g$ mantém-se tanto para a onda incidente quanto para a onda refletida pois

$$\rho_{\pm} = \frac{E}{mc^2} |A_{\pm}|^2. \quad (10)$$

Por outro lado, para $x > a$ as soluções são da forma

$$\phi = C_+ e^{+ikx} + C_- e^{-ikx}. \quad (11)$$

Para termos uma onda progressiva se afastando da região do potencial (propagando-se no sentido positivo do eixo X com $v_g = c^2 \hbar k / E > 0$) devemos impor $C_- = 0$. A densidade e a corrente nesta região do espaço, correspondendo a ϕ dada pela Eq. (11) com $C_- = 0$, são expressas por

$$\rho = \frac{E}{mc^2} |C_+|^2, \quad J_{\text{trans}} = \frac{\hbar k}{m} |C_+|^2. \quad (12)$$

Note que essas soluções para $|x| > a$ descrevem estados de espalhamento com $|E| > mc^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Possíveis estados ligados também poderiam ser descritos pelas Eqs. (5) e (11) com $k = i\kappa$, onde $\kappa = \sqrt{m^2 c^4 - E^2} / (\hbar c)$ com $|E| < mc^2$, e $A_+ = C_- = 0$.

Para $-a < x < a$ a solução geral tem a forma

$$\phi = B_+ e^{+iqx} + B_- e^{-iqx}, \quad (13)$$

onde

$$q = \frac{\sqrt{(E - g_t V_0)^2 - (mc^2 + g_s V_0)^2}}{\hbar c}. \quad (14)$$

As soluções $B_{\pm} e^{\pm iqx}$ com $q \in \mathbb{R}$ descrevem ondas planas que se propagam com velocidade de grupo

$$v_g = \pm \frac{c^2 \hbar q}{E - g_t V_0}. \quad (15)$$

com densidades e correntes associadas dadas por

$$\rho_{\pm} = \frac{E - g_t V_0}{mc^2} |B_{\pm}|^2 \quad \text{e} \quad J_{\pm} = \frac{\hbar q}{m} |B_{\pm}|^2. \quad (16)$$

Na circunstância em que $E < g_t V_0$ nos deparamos com um caso bizarro, pois as densidades são quantidades negativas. A manutenção da relação $J = \rho v_g$ para cada solução particular, contudo, é uma licença para interpretar $B_+ e^{+iqx}$ ($B_- e^{-iqx}$) a descrever a propagação, no sentido negativo (positivo) do eixo X , de partículas com carga de sinal contrário ao das partículas incidentes⁵. A corrente na região $|x| < a$, para cargas positivas tanto como para cargas negativas, pode então ser escrita como

$$J = \frac{\hbar q}{m} (|B_+|^2 - |B_-|^2). \quad (17)$$

No caso em que $q = i|q|$ não há ondas progressivas na região do potencial. Contudo há ainda uma corrente dada por

$$J = \frac{i\hbar|q|}{m} (B_+ B_-^* - B_+^* B_-). \quad (18)$$

3. Espalhamento

Vamos considerar a incidência de partículas ($E > mc^2$) e assim k , definido a Eq. (6), é uma quantidade real. A discriminação entre q real e q imaginário permite-nos identificar dois valores críticos para o potencial

$$V_1 = E - mc^2 \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{E + mc^2}{2g_t - 1} \quad \text{com} \quad g_t \neq 1/2 \quad (19)$$

e o valor de g_t nos permite segregar três classes distintas de soluções de espalhamento:

- **Classe A** - $g_t > 1/2$. Nesta classe temos que $q \in \mathbb{R}$ para $V_0 < V_1$ e $V_0 > V_2$ (note que $V_2 > 0$). Ondas não-progressivas, correspondendo a $q = i|q|$, ocorrem para uma barreira de potencial de altura mediana ($V_1 < V_0 < V_2$). Um cálculo simples revela que $E > g_t V_0$ para $V_0 < V_1$. Entretanto, $E < g_t V_0$ para $V_0 > V_2$, a circunstância em que há a propagação de cargas negativas confinadas na região $|x| < a$.
- **Classe B** - $g_t = 1/2$. Apenas V_1 desempenha papel na distinção entre valores reais e imaginários do número de onda q . Aqui $q \in \mathbb{R}$ somente para $V_0 < V_1$. Há apenas soluções com $E > g_t V_0$ e ondas não-progressivas ocorrem para uma barreira de potencial tanto ou quanto alta ($V_0 > V_1$).

⁵ Isto torna-se possível por causa da dupla possibilidade de sinais para a energia de um estado estacionário. Acontece que $B_{\pm} e^{\pm iqx}$ pode vir a descrever uma onda progressiva com energia negativa e velocidade de fase $v_f = \mp |E| / (\hbar q)$. A carência da interpretação física deste resultado será suprida numa seção posterior.

- **Classe C** - $g_t < 1/2$. Temos que $q \in \mathbb{R}$ para $V_2 < V_0 < V_1$ (note que $V_2 < 0$). Não mais que soluções com $E > g_t V_0$ são permitidas e ondas evanescentes ocorrem para uma barreira de potencial suficientemente alta ($V_0 > V_1$). O que causa estranheza é que ondas evanescentes vêm à tona para um poço de potencial um tanto profundo ($V_0 < V_2$).

Começaremos agora o cálculo de grandezas de suma importância na descrição do espalhamento, viz., os coeficientes de reflexão e transmissão. Não obstante a descontinuidade do potencial em $x = \pm a$, a autofunção e sua derivada primeira são funções contínuas.⁶ A demanda por continuidade de ϕ e $d\phi/dx$ fixa todas as amplitudes em termos da amplitude da onda incidente A_+ , viz.

$$\frac{A_-}{A_+} = \frac{i(q^2 - k^2) \sin(2qa) \exp(-2ika)}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)}, \quad (20)$$

$$\frac{B_+}{A_+} = \frac{k(q+k) \exp[-i(q+k)a]}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)}, \quad (21)$$

$$\frac{B_-}{A_+} = \frac{k(q-k) \exp[+i(q-k)a]}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)}, \quad (22)$$

$$\frac{C_+}{A_+} = \frac{2qk \exp(-2ika)}{2kq \cos(2qa) - i(q^2 + k^2) \sin(2qa)}, \quad (23)$$

onde as identidades matemáticas $\sin(i\theta) = i \sinh(\theta)$ e $\cos(i\theta) = \cosh(\theta)$ foram utilizadas para escrever as amplitudes relativas para os casos de q real e imaginário puro numa forma compacta.⁷

Agora focalizamos nossa atenção na determinação dos coeficientes de reflexão R e transmissão T . O coeficiente de reflexão (transmissão) é definido como a razão entre as correntes refletida (transmitida) e incidente. Haja vista que $\partial\rho/\partial t = 0$ para estados estacionários, temos que a corrente é independente de x . Usando este fato obtemos prontamente que

$$R = \frac{|A_-|^2}{|A_+|^2} = \left\{ 1 + \left[\frac{2qk}{(k^2 - q^2) \sin(2qa)} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (24)$$

$$T = \frac{|C_+|^2}{|A_+|^2} = \left\{ 1 + \left[\frac{k^2 - q^2}{2qk} \sin(2qa) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (25)$$

⁶Esta conclusão, válida para potenciais com descontinuidades finitas, pode ser obtida pela integração da Eq. (2) entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Pode-se verificar, pelo mesmo procedimento, que apenas as autofunções são contínuas quando as descontinuidades dos potenciais são infinitas.

⁷A transição de q real para q imaginário puro é feita pela prescrição $q \rightarrow i|q|$.

Seja lá como for temos que $R + T = 1$, como deve ser por causa da conservação da carga.

Ademais, deve ser observado que quando as ondas progressivas para a direita e para a esquerda na região do potencial ($q \in \mathbb{R}$) interferem de modo a formar uma onda estacionária (*i.e.*, quando $2qa = n\pi$ com $n = 1, 2, 3, \dots$), sucede a transmissão ressonante ($T = 1$), correspondendo às energias dadas por

$$E_n = g_t V_0 \pm \sqrt{\left(\frac{n\pi\hbar c}{2a} \right)^2 + (mc^2 + g_s V_0)^2}, \quad (26)$$

onde o sinal defronte do radical deve ser escolhido de forma que $E > mc^2$. Note que a ressonância de transmissão pode ocorrer tanto para uma barreira de potencial quanto para um poço de potencial.

As Figs. 1, 2 e 3 ilustram o coeficiente de transmissão para as três classes de soluções discriminadas anteriormente. Em todas as figuras usamos $E = 1, 1 mc^2$ e consideramos a/λ é igual a 1 nas Figs. 1 e 2, e $a/\lambda = 3$ na Fig. 3. Usamos o sistema de unidades em que $\hbar = c = m = 1$.

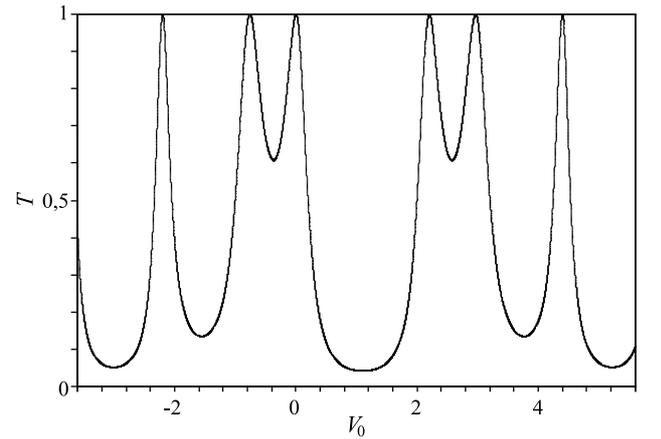


Figura 1 - Coeficiente de transmissão *vs.* intensidade do potencial para um caso da Classe A.

A Classe A apresenta um comportamento anômalo para uma barreira de potencial muito alta. Vimos anteriormente que para $g_t > 1/2$ e $V_0 > V_2$ há ondas progressivas na região do potencial enquanto a mecânica quântica não-relativística prevê a existência de ondas evanescentes. De mais a mais, a mecânica quântica não-relativística profetiza que, neste caso de tunelamento, o coeficiente de transmissão sofre uma supressão exponencial à medida que o potencial tende ao infinito, enquanto que nosso resultado prenuncia um coeficiente de transmissão oscilatório que exibe até mesmo um comportamento ressonante. A Classe B não apresenta resultados que contradizem a intuição baseada na

mecânica quântica não-relativística. A Classe C, entretanto, exibe um comportamento anômalo para um poço de potencial com $V_0 < V_2$: a supressão exponencial do coeficiente de transmissão à medida que o poço de potencial torna-se muito profundo.

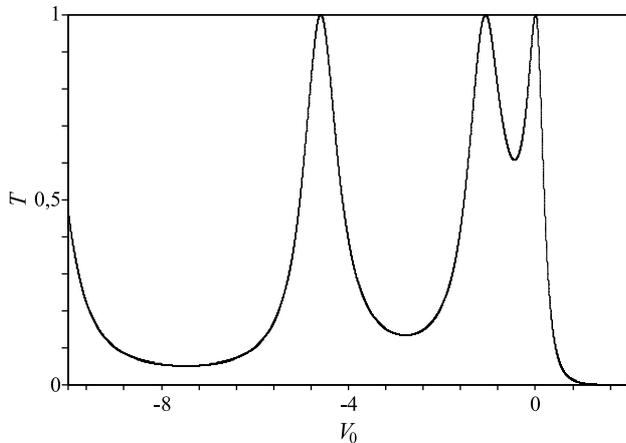


Figura 2 - Coeficiente de transmissão vs. intensidade do potencial para um caso da Classe B.

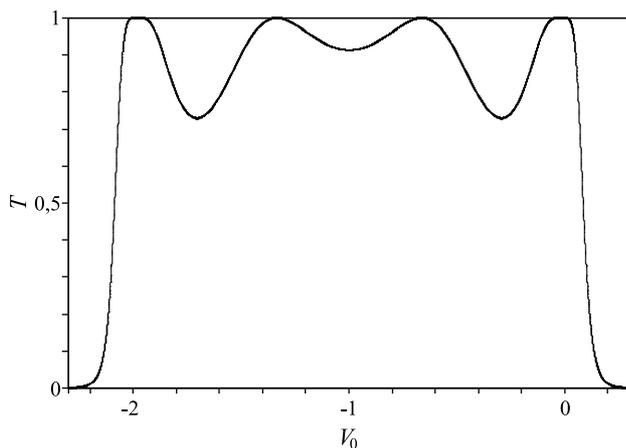


Figura 3 - Coeficiente de transmissão vs. intensidade do potencial para um caso da Classe C.

Da discussão relacionada com a Classe A, observa-se que o limiar para a existência de *cargas* negativas na região do potencial é dado por V_2 . Pode-se interpretar a possibilidade de propagação de *cargas* negativas na região da barreira de potencial como sendo devido ao fato que cada *carga* negativa tem energia $-E$ e está sujeita a um potencial efetivo dado por $(g_s - g_t)V_0$. Quer dizer, então, que as ondas progressivas nessa região de potencial descrevem, de fato, a propagação de antipartículas⁸. Destarte se $g_t > 1/2$ a antipartícula terá uma energia disponível (energia de repouso mais energia cinética) expressa por $-E - (1 - 2g_t)V_0$, donde se conclui sobre a energia do limiar para a existência de *cargas* negativas (antipartículas) movendo-se na região do potencial. Nas regiões onde $|x| > a$ com $V_0 > V_2$,

tais antipartículas serão descritas por ondas evanescentes pois o potencial efetivo torna-se maior que $-E$. As partículas estão sob a influência de um potencial dado $(g_s + g_t)V_0 = V_0$, e se as partículas estiverem sujeitas a uma barreira de potencial então as antipartículas estarão sujeitas a um poço (barreira) de potencial se $g_t > 1/2$ ($g_t < 1/2$). É razoável conjecturar que as partículas incidentes induzem a formação de estados ligados de antipartículas na região de interação. Esta idéia é reforçada pela observação que, no caso de $V_0 > V_2$ e $g_t > 1/2$, as antipartículas estão sujeitas a um poço de potencial efetivo com energia que excede o mínimo do potencial (fundo do poço) e é menor que o potencial máximo (boca do poço). Mais ainda, para $V_0 < V_2$ e $g_t > 1/2$, a energia da antipartícula é menor que o valor mínimo do potencial efetivo, uma circunstância bem conhecida em que a autofunção não satisfaz as condições de contorno apropriadas, ora pois tal solução não é aceitável.

A situação paradoxal observada no espalhamento da Classe C, para um poço suficientemente profundo ($V_0 < V_2 < 0$), também pode ser elucidada com a argumentação delineada no parágrafo anterior. Realmente, quando $g_t < 1/2$ e a partícula está sujeita a um poço de potencial, há um poço de potencial efetivo para a antipartícula com uma energia disponível dada por $-E - (2g_t - 1)|V_0|$. Lá então torna-se possível a propagação de antipartículas. Há a propagação promíscua de *cargas* positivas (partículas) e negativas (antipartículas) na região do potencial, com uma densidade de *carga* resultante positiva quando o poço de potencial torna-se muito profundo e $g_t < 1/2$. Na região externa do potencial ($|x| > a$) tais antipartículas serão descritas por ondas evanescentes já que o potencial efetivo é maior que $-E$. Aqui, tal como na Classe A, há formação de estados ligados de antipartículas induzida pela incidência de partículas.

Em todas as circunstâncias, consideramos a incidência de partículas e obtivemos como resultado a transmissão de partículas. Em determinadas situações de potenciais extremamente intensos, entretanto, chegamos ao entendimento que há estados ligados de antipartículas na região do potencial. Há uma pergunta que não pode calar: qual a origem de tais antipartículas?

Para $g_t > 1/2$ e $V_0 > V_2 > 0$, os *continua* com $E > mc^2$ para as partículas e $E < -mc^2$ para as antipartículas que existe para $|x| > a$ tornam-se $E > mc^2 + V_0$ para as partículas e $E < -mc^2 - (g_s - g_t)V_0$ para as antipartículas em $|x| < a$. Quando uma partícula incide em $x = -a$ com energia menor que $-mc^2 - (g_s - g_t)V_0$, o componente vetorial da barreira de potencial estimula a produção de antipartículas. Em virtude da conservação da *carga* há, em verdade, a criação de pares partícula-antipartícula e, como o potencial vetorial em $|x| < a$ é repulsivo para partículas e atrativo para antipartículas, as partículas serão ne-

⁸Note que partícula e antipartícula têm massas iguais.

cessariamente ejetadas da região (para a esquerda) e as antipartículas serão necessariamente confinadas na região do potencial. Quando uma antipartícula criada em $x = -a$ incide em $x = +a$ o componente vetorial da barreira de potencial estimula mais uma vez a produção de pares, agora então, as partículas serão ejetadas para a direita da região de interação. Não apenas a carga é conservada no processo de criação de pares. Visto que os pares produzidos em $x = \pm a$ têm energias de sinais contrários, conclui-se que a energia também é uma quantidade conservada no processo de criação de pares. Apesar da possibilidade da criação de pares partícula-antipartícula nas interfaces do potencial localizadas em $x = \pm a$, um fenômeno relacionado com o paradoxo de Klein, e a propagação de antipartículas na região $|x| < a$, a conjuntura não é propícia à emissão de antipartículas. Poderíamos então nos aventurar a afirmar que o paradoxo de Klein é inerente às equações relativísticas e não é necessariamente relacionado com a irradiação de antipartículas, como é propalado na literatura. Torna-se evidente que o acoplamento escalar resulta no aumento da energia mínima necessária para a criação de pares partícula-antipartícula. O valor mínimo do limiar ($V_0 = 2mc^2$) ocorre quando o acoplamento é puramente vetorial ($g_t = 1$). A adição de um contaminante escalar contribui para aumentar o valor do limiar, o qual, surpreendentemente, torna-se infinito já para uma mistura meio a meio de acoplamentos. Deste modo, a produção de pares não é factível se o acoplamento vetorial não exceder o acoplamento escalar, ainda que a barreira de potencial V_0 seja extremamente alta.

Para $g_t < 1/2$ e $V_0 < V_2 < 0$, porém, os *continua* com $E > mc^2$ para as partículas e $E < -mc^2$ para as antipartículas que existe para $|x| > a$ tornam-se $E > mc^2 - |V_0|$ para as partículas e $E < -mc^2 + (g_s - g_t) |V_0|$ para as antipartículas em $|x| < a$. Neste caso, quando a partícula incidente tem energia menor que $-mc^2 + (g_s - g_t) |V_0|$ partículas e antipartículas propagam-se efetivamente num poço de potencial. Convém lembrar que as antipartículas não têm chance de se propagar para as regiões externas do poço de potencial, e assim sendo, tal como no caso com $g_t > 1/2$, estão confinadas à região $|x| < a$. É meritória a constatação que antipartículas, diferentemente do caso com $g_t > 1/2$, não são produzidas nas interfaces do potencial, em outras palavras, o paradoxo de Klein não faz parte do cenário.

É interessante observar que, quer na Classe A quer na Classe C, os estados ligados de antipartículas na região de interação ocorrem até mesmo quando as partículas incidentes se movem com baixas velocidades.

A ausência de conflitos na Classe B, quando os resultados são comparados com aqueles previstos pela mecânica quântica não-relativística, é facilmente explicada pela constatação que, enquanto o continuum das partículas em $|x| > a$ ($E > mc^2$) torna-se $E > mc^2 + V_0$ em $|x| < a$, o continuum das antipartículas é insensível

à ação da interação.

4. Estados ligados

O formalismo desenvolvido na Seção 3 também permite a análise de estados ligados. Conforme já foi mencionado, tais possíveis estados ligados teriam energias no intervalo $-mc^2 < E < mc^2$. As soluções para os estados ligados também podem ser segregadas em três classes, segundo o valor de g_t . Neste contexto, os potenciais críticos dados por (19) sofrem alterações de módulo e sinal devido à mudança de $E > mc^2$ para $-mc^2 < E < mc^2$. Temos assim que $-2mc^2 < V_1 < 0$, $0 < V_2 < 2mc^2/(2g_t - 1)$ para $g_t > 1/2$ e $-2mc^2/(1 - 2g_t) < V_2 < 0$ para $g_t < 1/2$. Logo a seguir exploramos algumas propriedades das classes de soluções:

- **Classe A** - $g_t > 1/2$. Esta classe permite estados ligados tanto para um poço de potencial com $V_0 < V_1$, quanto para uma barreira de potencial com $V_0 > V_2$. O desconforto neste último caso é aliviado pela percepção que a barreira de potencial é capaz de ligar antipartículas. Note que quando o poço é extremamente raso, somente estados com $E \approx mc^2$ aparecem no espectro, pois $V_1 \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow mc^2$. Por outro lado, quando a barreira é extremamente baixa, somente estados com $E \approx -mc^2$ lá surgem, pois $V_2 \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow -mc^2$. Ou seja, quando o potencial é fraco, estados do continuum de partículas (antipartículas) tornam-se membros do espectro de estados ligados de partículas (antipartículas) no caso de um poço (barreira) de potencial. Note ainda que $V_1 \rightarrow -2mc^2$ quando $E \rightarrow -mc^2$, e $V_2 \rightarrow 2mc^2/(2g_t - 1)$ quando $E \rightarrow mc^2$, o que significa que poderiam aparecer energias próximas de $-mc^2$ no espectro de partículas, tanto como energias próximas de mc^2 no espectro de antipartículas, para potenciais um tanto intensos. É instrutivo lembrar que no caso em que $g_t = 1$, o caso de um potencial vetorial puro, o espectro deve exibir a simetria $E \rightarrow -E$ sob a transformação $V_0 \rightarrow -V_0$.
- **Classe B** - $g_t = 1/2$. Nesta classe, somente um poço de potencial permite estados ligados, pois $V_0 < V_1$. Haja vista que, tal como na classe A, $V_1 \rightarrow 0$ quando $E \rightarrow mc^2$ e $V_1 \rightarrow -2mc^2$ quando $E \rightarrow -mc^2$ podemos concluir que este poço de potencial liga somente partículas e que energias próximas de $-mc^2$ são toleradas para um poço suficientemente profundo.
- **Classe C** - $g_t < 1/2$. Aqui temos que $V_2 < V_0 < V_1$ para $E > E_c$ e $V_1 < V_0 < V_2$ para $E < E_c$, onde $E_c = -mc^2 g_t / (1 - g_t)$. Temos que $E \approx mc^2$ para os estados de partículas, e $E \approx -mc^2$ para

os estados de antipartículas, quando V_0 está na vizinhança de seus valores extremos. Os estados de partículas só são consentidos se o poço não exceder a profundidade $-2mc^2/(1-2g_t)$, enquanto a profundidade máxima igual a $-2mc^2$ deve ser observada pelos estados de antipartículas. As energias dos estados de antipartículas são sempre negativas. No entanto, os estados ligados de partículas podem ter energias negativas se $-mc^2/(1-2g_t) < V_0 < -mc^2$. Em quaisquer circunstâncias, os níveis de energias de partículas e antipartículas nunca se interceptam. Nesta classe, convém lembrar, o espectro deve ser simétrico em torno de $E = 0$ no caso de um potencial escalar puro ($g_t = 0$), quando então a profundidade do poço, naturalmente, não deve ultrapassar $-2mc^2$ e energias nulas não são permitidas. Mais ainda, há também uma simetria do espectro em torno de $V_0 = -mc^2$, no caso de $g_t = 0$.

A prescrição $k \rightarrow i\kappa$, onde

$$\kappa = \frac{\sqrt{m^2c^4 - E^2}}{\hbar c}, \quad (27)$$

com $|E| < mc^2$, transforma as soluções (5) e (11) em

$$\phi = \begin{cases} A_+ e^{-\kappa x} + A_- e^{+\kappa x} & \text{para } x < -a \\ C_+ e^{-\kappa x} + C_- e^{+\kappa x} & \text{para } x > +a. \end{cases} \quad (28)$$

Devemos impor que $A_+ = C_- = 0$ para que as densidades de carga, expressas pela Eq. (3), sejam finitas em $x = \pm\infty$. Ora, tem que ser assim, pois $\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\phi|^2 < \infty$. Enquanto isso, a solução na região do potencial continua a ser expressa pela Eq. (13) com q dado pela Eq. (14). Sendo o potencial da Eq. (4) invariante sob inversão espacial ($x \rightarrow -x$), podemos escolher autofunções com paridades definidas, viz.

$$\phi(x) = \begin{cases} A e^{+\kappa x} & \text{para } x < -a \\ B \cos(qx) & \text{para } |x| < a \\ A e^{-\kappa x} & \text{para } x > +a, \end{cases} \quad (29)$$

para $\phi(-x) = +\phi(x)$, e

$$\phi(x) = \begin{cases} -A e^{+\kappa x} & \text{para } x < -a \\ B \sin(qx) & \text{para } |x| < a \\ A e^{-\kappa x} & \text{para } x > +a, \end{cases} \quad (30)$$

⁹Fortuitamente, as condições de quantização também poderiam ser obtidas por meio da identificação dos pólos da amplitude de transmissão. Para esta finalidade os valores físicos do número de onda k , definidos no eixo real, são estendidos para o plano complexo. Com efeito, o denominador da Eq. (23), com a prescrição $k \rightarrow i\kappa$, é nulo sempre que $\cot(2qa) = (q^2 - \kappa^2)/(2q\kappa)$. Com a intervenção da identidade $\cot(\theta) = -\tan(\theta/2) \pm \sqrt{1 + \cot^2(\theta)}$, podemos reescrever a localização dos pólos por $\tan(qa) = [\pm(\kappa^2 + q^2) + \kappa^2 - q^2]/(2q\kappa)$, expressão que reduz-se à primeira (segunda) linha da Eq. (31) acaso o sinal é positivo (negativo).

para $\phi(-x) = -\phi(x)$. Aqui, mais uma vez usamos as identidades trigonométricas $\sin(i\theta) = i \sinh(\theta)$ e $\cos(i\theta) = \cosh(\theta)$ para escrever $\phi(x)$ numa forma compacta, seja q uma quantidade real, seja q uma quantidade imaginária. A continuidade de ϕ e $d\phi/dx$ em $x = +a$, ou equivalentemente em $x = -a$, fornece as condições de quantização⁹

$$\frac{\kappa}{q} = \begin{cases} \tan(qa) & \text{para } \phi(-x) = +\phi(x) \\ -\cot(qa) & \text{para } \phi(-x) = -\phi(x). \end{cases} \quad (31)$$

As equações acima são equações reais, seja q real ou imaginário puro. Entretanto, as condições de quantização para q imaginário, viz.

$$-\frac{\kappa}{|q|} = \begin{cases} \tanh(|q|a) & \text{para } \phi(-x) = +\phi(x) \\ \coth(|q|a) & \text{para } \phi(-x) = -\phi(x), \end{cases} \quad (32)$$

não fornecem soluções porque o membro esquerdo da Eq. (32) é negativo e os membros direitos são positivos. Em outras palavras, as possíveis soluções para os estados ligados têm que ter um número de onda real na região do potencial.

Neste caso de $q \in \mathbb{R}$, é de utilidade definir a variável z_0 como $z_0 = \sqrt{z^2 + (\kappa a)^2}$, onde $z = qa$. Por conseguinte, podemos reescrever as condições de quantização como

$$\sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1} = \begin{cases} \tan(z) & \text{para } \phi(-x) = +\phi(x) \\ -\cot(z) & \text{para } \phi(-x) = -\phi(x). \end{cases} \quad (33)$$

Note que $z < z_0$ por definição, e que $z \simeq z_0$ quando $|E| \simeq mc^2$ e nos casos em que $q \gg 1/\lambda$. A natureza do espectro resultante das soluções destas equações transcendentais podem ser visualizadas na Fig. 4, onde constam esboços dos membros direito e esquerdo da Eq. (33). As abscissas das interseções de $\tan(z)$ e $-\cot(z)$ com $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$ fornecem as soluções desejadas. O uso das Eqs. (14) e (27) permite-nos escrever

$$z_0 = \frac{a}{\hbar c} \sqrt{(2g_t - 1)V_0^2 - 2V_0[(E - mc^2)g_t + mc^2]}, \quad (34)$$

e daí vemos que z_0 cresce linearmente com o aumento da largura da região de interação.

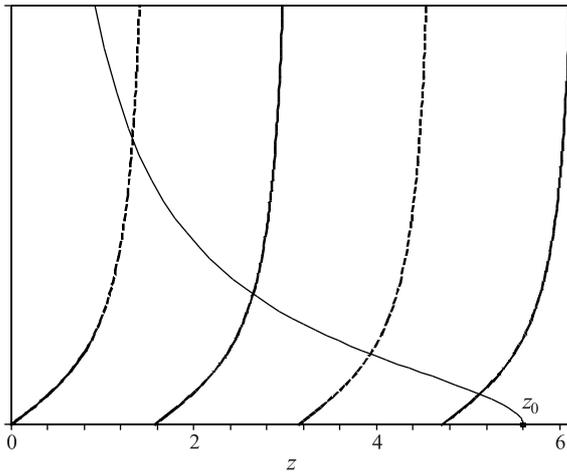


Figura 4 - Soluções das condições de quantização expressas por (33) para um valor representativo de z_0 . A linha contínua representa a função $\sqrt{(z_0/z)^2 - 1}$, a linha tracejada $\tan(z)$ e a linha ponto-tracejada $-\cot(z)$.

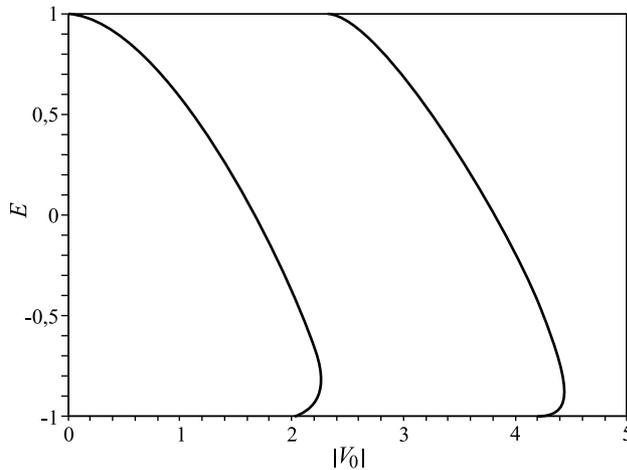


Figura 5 - Níveis de energia em função de V_0 para um poço de potencial com $g_t = 1$ e $a = \lambda/2$.

Para $q \gg 1/\lambda$, o que significa $a \ll z_0\lambda$ e $z_0 \simeq z$, o que acontece somente para $g_t \geq 1/2$ e $|V_0| > 2mc^2$, poderá não haver soluções de estados ligados e em algumas circunstâncias a única solução corresponde a uma autofunção de paridade par.

Para $q \ll 1/\lambda$, o que significa $a \gtrsim z_0\lambda$ e $z_0 \gg z$, fica claro que há uma seqüência finita de estados ligados com paridades alternadas. O número de soluções cresce com o aumento de z_0 e há pelo menos uma solução com autofunção de paridade par no espectro, não importa o quão pequeno seja z_0 . Para dizer a verdade, z_0 como função de $|V_0|$ é monotonicamente crescente se $g_t \geq 1/2$, significando que o número de estados ligados cresce com o aumento de $|V_0|$. Para $g_t < 1/2$, porém, z_0 é crescente somente nos intervalos: $-2mc^2/(1-2g_t) < V_0 < -mc^2/(1-2g_t)$ para $E > 0$, e $-2mc^2 < V_0 < -mc^2$ para $E < 0$. A Fig. 4 ainda permite-nos concluir que para grandes valores de z_0 e para os valores mais baixos de z , as soluções da Eq. (33)

são expressas por $z_n = n\pi/2$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$, com n ímpar (par) correspondendo às soluções com autofunções pares (ímpares). Curiosamente, a forma destas soluções assintóticas para as energias corresponde justamente à condição de transmissão ressonante expressa pela Eq. (26), sendo que agora o sinal defronte do radical deve ser escolhido de modo que $|E| < mc^2$.

As Figs. 5 a 9 ilustram os resultados do cálculo numérico das soluções da Eq. (33) com $V_0 < 0$ e para os menores valores de z_0 , com $g_t = 1, 3/4, 1/2, 1/4$ e 0, respectivamente. Consideramos $a/\lambda = 1/2$ nas Figs. 5 e 6, e $a/\lambda = 5$ nas Figs. 7 a 9. Tal como no caso de espalhamento, usamos o sistema de unidades em que $\hbar = c = m = 1$.

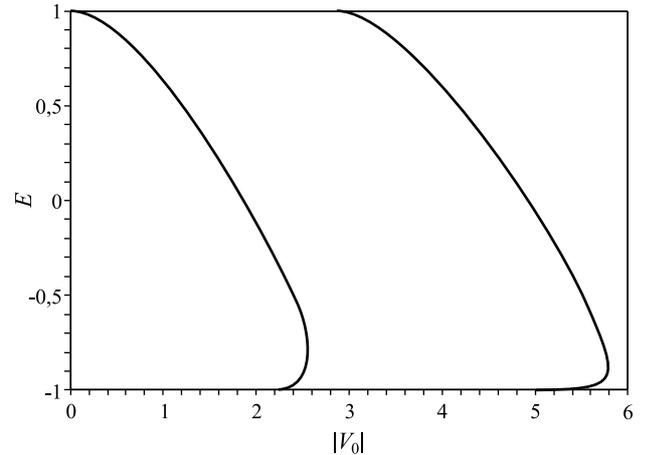


Figura 6 - Níveis de energia em função de V_0 para um poço de potencial com $g_t = 3/4$ e $a = \lambda/2$.

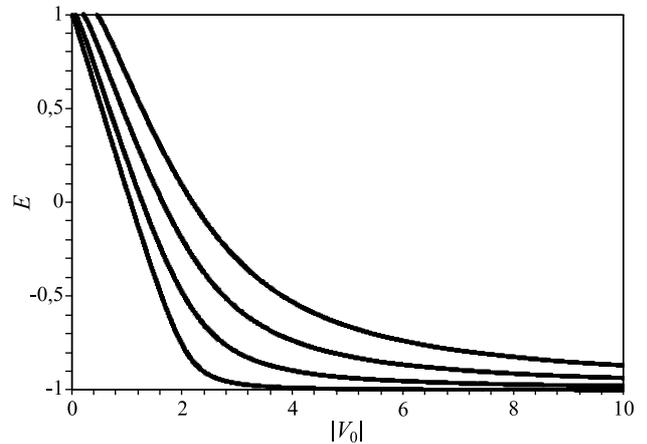


Figura 7 - Níveis de energia em função de V_0 para um poço de potencial com $g_t = 1/2$ e $a = 5\lambda$.

A Classe A exhibe o efeito SSW para um poço suficientemente estreito e profundo ainda que haja um acoplamento escalar contaminante. Para poços largos, o comportamento do espectro não difere daquele resultante da equação de Dirac, quando então os níveis de energias correspondentes às partículas mergulham no continuum correspondente às antipartículas. Seja o

poço estreito ou largo, o paradoxo de Klein é parte integrante do cenário de potenciais muito fortes. Para a Classe B só há estados ligados de partículas e seus níveis de energia tendem assintoticamente para o continuum inferior à medida que o poço de potencial se aprofunda, implicando assim na ausência do paradoxo de Klein. Na Classe C, os estados ligados de antipartículas voltam a fazer parte do espectro ainda que o poço seja pouco profundo. Entretanto, os níveis de energia dos estados ligados de partículas e antipartículas nunca se encontram, acenando para a completa ausência do paradoxo de Klein. De qualquer jeito, quer os níveis de partículas, quer os níveis de antipartículas, mergulham em seus próprios *continua* à medida que o poço se torna muito profundo. Há de se notar também um fato excepcional na Classe C: uma profundidade limite para o poço além da qual não há energias permitidas para os estados ligados, quando então, todos os níveis de energia já mergulharam em seus respectivos *continua*.

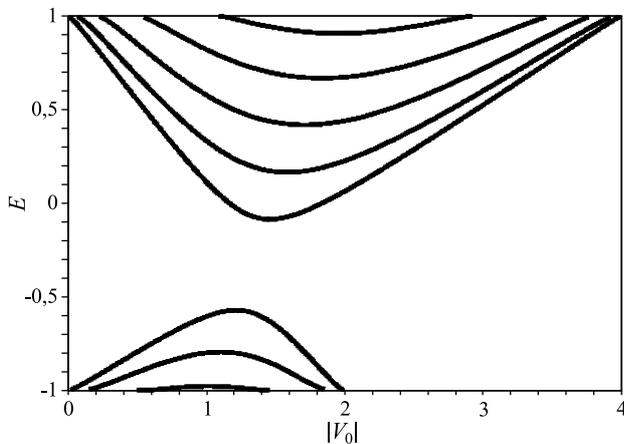


Figura 8 - Níveis de energia em função de V_0 para um poço de potencial com $g_t = 1/4$ e $a = 5\lambda$.

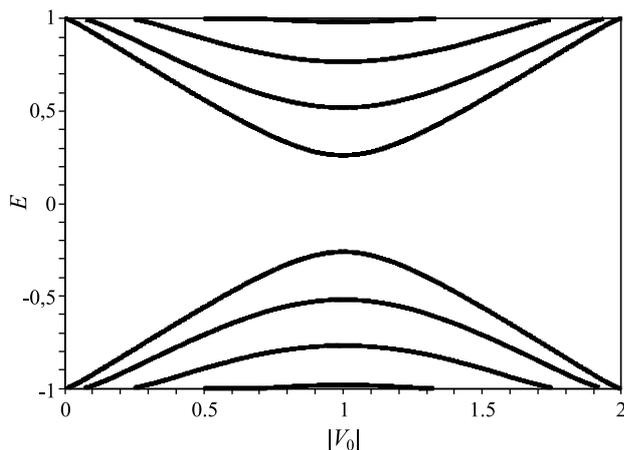


Figura 9 - Níveis de energia em função de V_0 para um poço de potencial com $g_t = 0$ e $a = 5\lambda$.

O efeito SSW tem sido interpretado como sendo devido à polarização da densidade de carga da antipartícula pelo potencial de interação [7]. Esta interpretação torna-se razoável com um exemplo simples da teoria eletromagnética clássica. É sabido que uma carga pontual pode atrair um objeto neutro em sua vizinhança por causa da polarização induzida pela carga puntiforme. Decerto a adição de uma pequena quantidade de carga ao objeto, de mesmo sinal que a carga pontual, diminuirá a força de atração entre os dois corpos mas não se pode refutar que poderá não ser o bastante para causar a repulsão. A conclusão óbvia é que poderá haver atração entre dois corpos com cargas elétricas de mesmo sinal. Torna-se ainda compreensível que a polarização é um fenômeno de curto alcance e requer que pelo menos um dos corpos seja extenso, ou seja, não puntiforme.¹⁰ Lembrando que a *carga* da partícula governada pela EKG está distribuída por todo o espaço, conforme a Eq. (3), podemos inferir sobre a polarização da *carga* na região de interação. Com efeito, o componente vetorial do poço de potencial faz com que estados estacionários com energias negativas possam ter o sinal de suas densidades de *carga* alterados. Basta compreender que um estado com energia um pouquinho maior que $-mc^2$ está na iminência de alterar o sinal de sua densidade de *carga* na região do potencial quando $|V_0| > mc^2/g_t$. Uma densidade de *carga* positiva na região interna do poço, não importando o sinal da densidade de *carga* na região externa, é uma condição *sine qua non* para a existência de estados ligados. Entretanto, torna-se imprescindível que a densidade de *carga* seja tal que a interação forneça uma energia contida no conjunto dos valores permitidos para as energias dos estados ligados. Por que o efeito SSW não se manifesta quando $g_t \leq 1/2$? Bem, o componente escalar do poço de potencial não acopla com a *carga* e não intervém na densidade de *carga*. O potencial escalar age indistintamente sobre partículas e antipartículas e assim contribui para minimizar a eficácia da polarização devida ao potencial vetorial. É este amálgama de efeitos competitivos que faz com que o efeito SSW só se manifeste para os casos em que o acoplamento vetorial supera o acoplamento escalar.

5. Conclusão

A mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar na EKG unidimensional mostrou-se muito profícua. Verificamos que o acoplamento escalar não desempenha papel explícito na determinação da velocidade de grupo, e nem mesmo na determinação da densidade e da corrente.

A exploração do potencial quadrado, tanto no caso de espalhamento quanto no caso de estados ligados, re-

¹⁰A interação entre uma carga pontual e uma esfera condutora carregada é suscetível ao tratamento analítico [15], e permite concluir que: a) para grandes distâncias, a força entre os corpos reduz-se àquela expressa pela lei de Coulomb para duas cargas pontuais; b) para curtas distâncias, há atração entre os corpos ainda que a carga da esfera condutora tenha o mesmo sinal que a carga puntiforme.

velou resultados realmente surpreendentes. Em ambos os casos, a intensidade do acoplamento vetorial relativa à intensidade do acoplamento escalar permitiu discriminar três classes de soluções.

O espalhamento de partículas em potenciais quadrados muito intensos apresentou resultados paradoxais que foram satisfatoriamente solucionados pela suposição da mediação de antipartículas. A mistura arbitrária de acoplamentos desvelou a inexequibilidade do mecanismo da produção espontânea de pares no caso em que $g_t \leq 1/2$, tanto quanto o aumento do limiar da energia de produção de pares no caso em que $g_t > 1/2$ devido à presença do acoplamento escalar. Também foi revelado que, apesar da mediação de antipartículas, somente as partículas são irradiadas da região de interação.

A investigação dos estados ligados em poços de potenciais quadrados revelou o surgimento do efeito SSW para potenciais intensos e de curto alcance apenas para as circunstâncias em que o acoplamento vetorial excede o acoplamento escalar. Apresentamos um modelo clássico que torna plausível o efeito SSW tanto quanto sua inibição pelo potencial escalar.

Aos intrépidos leitores, deixamos a tarefa do exame das conseqüências da mistura de acoplamentos vetorial e escalar no potencial quadrado para o caso fermiônico.

Agradecimentos

Os autores são gratos ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [2] M.J. Thomson and B.H.J. McKellar, *Am. J. Phys.* **59**, 340 (1991).
- [3] R.-K. Su, G.G. Siu and X. Chou, *J. Phys. A* **26**, 1001 (1993).
- [4] N. Dombey and A. Calogeracos, *Phys. Rep.* **315**, 41 (1999).
- [5] L.I. Schiff, H. Snyder and J. Weinberg, *Phys. Rev.* **57**, 315 (1940).
- [6] V.S. Popov, *Sov. Phys. JETP* **32**, 526 (1971).
- [7] A. Klein and J. Rafelski, *Phys. Rev. D* **11**, 300 (1975).
- [8] M. Bawin and J.P. Lavine, *Phys. Rev. D* **12**, 1192 (1975).
- [9] W. Fleischer and G. Soff, *Z. Naturforsch.* **39a**, 703 (1984).
- [10] C. Rojas and V.M. Villalba, *Phys. Rev. A* **71**, 052101 (2005).
- [11] V.M. Villalba and C. Rojas, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 313 (2006).
- [12] V.M. Villalba and C. Rojas, *Phys. Lett. A* **362**, 21 (2007).
- [13] T.R. Cardoso e A.S. de Castro, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **29**, 203 (2007).
- [14] W. Pauli and V.F. Weisskopf, *Helv. Phys. Acta* **1**, 709 (1934).
- [15] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, Nova Iorque, 1962), 2^a ed.