

Circuitos Resistivos Simétricos: uma Abordagem Experimental

Symmetric Resistive Circuits: an Experimental Approach

L. Motta¹, A.C.F. Santos^{*2}

¹Colégio Brigadeiro Newton Braga, Diretoria de Ensino da Aeronáutica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

²Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Recebido em 08 de janeiro de 2021. Revisado em 18 de março de 2021. Aceito 19 de abril de 2021.

Neste trabalho apresentamos uma sequência didática experimental utilizando material de baixo custo e fácil acesso, na qual circuitos elétricos resistivos simétricos são conceituados e montados. Também é ilustrado de forma concreta o Teorema do Ponto Médio (TPM). Tal trabalho objetiva acrescentar, ao pequeno número de trabalhos experimentais envolvendo circuitos elétricos resistivos simétricos, uma proposta que aborde o assunto de forma lúdica e leve. Fazemos isso por meio do uso de lâmpadas incandescentes-halógenas como resistores, pois, nesse caso, temos um excelente indicativo visual de como a corrente elétrica está se distribuindo e, conseqüentemente, tem-se uma visualização direta da simetria ou não existente.

Palavras-chave: Abordagem experimental, Simetria, Circuitos resistivos, Circuitos bidimensionais, Circuitos simétricos, Hexágono de resistores.

In this work we present an experimental didactic sequence using low cost and easy access material, in which two-dimensional (2D) and symmetrical resistive electrical circuits are conceptualized and assembled. The Middle Point Theorem (MPT) is concretely illustrated. Such work aims to try to fill a gap: the absence of experiments involving symmetrical resistive electrical circuits. We do this by using incandescent-halogen lamps as resistors, because, in this case, we have an excellent visual indicator of how the electric current is being distributed and, consequently, there is a direct visualization of the symmetry or its non-existence.

Keywords: Experimental approach, Symmetry, Resistive circuits, Bidimensional circuits, Symmetric circuits, Hexagon of resistors.

1. Introdução

Os conceitos de simetria, seja na linguagem comum, artística ou no contexto científico da física e da matemática, foram abordados por Barata e Nussenzveig [1] e Caruso [2]. O artigo de Barata e Nussenzveig foi também publicado num espaço de divulgação destinado ao grande público (jornal de grande circulação), o que mostra a visão de que o tema é relevante à formação geral da população.

“Simetria (*do Grego $\sigma\mu\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$*), que significa originalmente “algo com medida”), não é apenas um conceito estético ou matemático. Desde os primórdios da física na Grécia antiga, considerações de simetria têm-se demonstrado uma ferramenta muito poderosa e útil (quase indispensável) para a compreensão e a explicação racionais da natureza. Além disso, argumentos de simetria vem se construindo gradualmente, ao longo de toda a História da Física, e com particular destaque no século XX, em um dos principais pilares da formação teórica das leis físicas” [2].

Segundo Caruso [2], corrobora para esta afirmativa a declaração de Weinberg [3] “Da fusão da Relatividade com a Mecânica Quântica resultou uma nova visão do mundo, onde a matéria perdeu seu papel central. Este papel foi usurpado por princípios de simetria, alguns deles ocultos à nossa visão presente do Universo.” Uma afirmação bastante contundente, também, é feita por Hill e Lederman [4]: “Simetria controla a Física de modo extremamente profundo e isto é a lição mais importante do século XX.”

Nas palavras de Caruso [2]: “Assim como cabe aos pesquisadores desvelarem os princípios de simetria ainda ocultos na natureza, na busca de um entendimento maior do Universo, deve caber ao professor de Ensino Médio uma tarefa de certa forma análoga: fazer ver ao aluno o quanto mesmo a Física básica, objeto de seu estudo, também oculta conceitos de simetria, de cuja compreensão depende um aprendizado mais amplo e profundo da própria Física.” Necessidade essa também salientada por Mania e Mania [5]: “Explorar conceitos de simetria é sempre uma tarefa incomum, embora ela esteja presente em muitas situações de interesse, criando padrões que nos auxiliam no conceito de organização. Já a partir do nível básico de formação, essa ferramenta muitas

* Endereço de correspondência: toni@if.ufrj.br

vezes vem a desempenhar papel importante na solução de problemas o que a torna indispensável no desenvolvimento de aprendizados. Isso está em conformidade com os estudos sobre aprendizagem que têm costumeiramente expressado a necessidade da introdução de simetrias e suas propriedades como uma parte da grade curricular básica. Dessa forma, estar apto a identificar linhas de simetria, congruências e formas similares é um desafio que campos da mente humana tendem a incorporar.”

Como objetos de estudo da física que favorecem o aprimoramento das habilidades anteriormente citadas, alguns são particularmente profícuos, tais como: centro de massa, momento de inércia, estática, cinemática e dinâmica no campo da mecânica e, campo elétrico, potencial elétrico, leis de Gauss e Ampère, associação de capacitores e associação de resistores, no campo do eletromagnetismo, sendo associação de resistores o foco do presente trabalho.

Durante o trabalho em sala de aula nota-se, de maneira geral, uma grande dificuldade por parte dos estudantes em conseguir realizar a simplificação de um circuito resistivo, utilizando para isso o método da redução série – paralelo; essa dificuldade se mostra ainda mais evidente quando há associação mista na qual não se percebe claramente quando resistores estão ou não em série ou em paralelo. O uso da simetria é uma ferramenta extremamente eficaz na resolução de problemas, nas situações em que, efetivamente, o circuito apresenta essa propriedade. Ao tratarmos de circuitos resistivos simétricos em sala de aula – calculando resistências equivalentes (Reqs), no geral – os estudantes relatam a sensação de estarem diante de um problema puramente matemático. Nesse sentido, a atividade experimental se faz extremamente necessária para que seja verificado, por meio de medidas ou observações qualitativas, que se trata de problemas de física!

Após uma minuciosa busca bibliográfica, foi percebido pelos autores que há poucas atividades experimentais, como veremos na seção seguinte, envolvendo circuitos resistivos simétricos, notadamente, utilizando-se lâmpadas como resistores. Em livros didáticos, seja em nível de graduação ou ensino médio, ou mesmo em exames vestibulares, o mais comum quando se aborda geometrias regulares tridimensionais (3D) ou bidimensionais (2D), são circuitos nos quais os resistores apresentam resistências iguais. Nesse caso particular, principalmente, utilizando-se lâmpadas como “resistores” (considerados ôhmicos), temos um excelente indicativo visual de como a corrente elétrica está se distribuindo, uma vez que o brilho aumenta com a potência elétrica consumida ($P = R \cdot i^2$) e, conseqüentemente, tem-se uma visualização direta da simetria ou não existente.

Com vistas ao desenvolvimento das habilidades anteriormente citadas, foi proposto neste trabalho um estudo experimental envolvendo associações simétricas de resistores em arranjos fundamentalmente bidimensionais (2D) utilizando-se para este fim materiais de baixo

custo e fácil acesso. É feita uma proposta de sequência didática na qual circuitos elétricos resistivos simétricos são conceituados e montados. Também é ilustrado de forma concreta (verificação experimental) o Teorema do Ponto Médio (TPM). Entendemos que a iniciação por circuitos bidimensionais (2D) é pedagogicamente recomendável antes de serem analisados os arranjos tridimensionais (3D), assim como é feito de modo comum nos livros didáticos durante a abordagem teórica.

Quanto à organização desse artigo: inicialmente foi mostrada a importância do tema simetria, tanto do ponto de vista da física como ciência, como ao seu caráter didático. Em seguida, fez-se uma breve análise bibliográfica teórica e experimental acerca do tema simetria no contexto circuitos elétricos resistivos. Logo após, são estabelecidos os objetivos gerais e específicos. Finalizando o trabalho, apresentamos a proposta didática – aparato experimental e sequência didática, resultados e por fim, os comentários finais na seção concludente do texto.

2. Revisão da Literatura

Para a realização da revisão bibliográfica, foi realizado um levantamento do universo de trabalhos sobre o ensino de circuitos elétricos e classificação dos trabalhos (experimental, teórico, se envolve simetria). O universo de trabalhos é constituído por artigos publicados nas principais revistas de ensino de física do Brasil (A Física na Escola, Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Revista Brasileira de Ensino de Física) e do exterior (Physical Review, Physics Education Research, Physics Review Special Topics, Physics Education Research, The Physics Teacher, American Journal of Physics). O critério de seleção dessas publicações foi baseado em revistas cujo conteúdo incluía novas abordagens para a instrução em sala de aula e laboratório.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) [6] estabelece em seu artigo 35, parágrafo II que, no ensino médio, se adotará metodologias de ensino e avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes. Além do mais, a LDB também estabelece que estudantes integrem conhecimento teórico e conhecimento prático; salutarmente, os ensinamentos teórico e experimental devem ser efetuados em consonância. Neste contexto, a utilização de práticas de laboratório ou uso de tecnologias de informação e comunicação (TIC), como simulações computacionais, estão em total acordo com as diretrizes nacionais. Para Borges [7]: “descartar a possibilidade de que os laboratórios têm um papel importante no ensino de ciências significa destituir o conhecimento científico de seu contexto, reduzindo-o a um sistema abstrato de definições, leis e fórmulas. O que se deseja buscar é evitar uma fragmentação do conhecimento, de modo que a própria aprendizagem seja mais interessante, motivadora e acessível aos estudantes.” Segundo White [8], “nós preferimos pensar que os laboratórios funcionam por que

acrescentam cor a curiosidade de objetos não usuais e eventos diferentes, em contraste com a prática comum em sala de aula de permanecer assentado.”

Fatores estruturais como ausência de espaço físico adequado (não existir o laboratório no espaço escolar) ou escassez de recursos financeiros; ou conjunturais, como “falta tempo”, fazem com que muitos docentes acabem utilizando aulas exclusivamente expositivas, seguindo de modo mais corriqueiro a lógica: definição → exemplo → exercícios de aplicação. Nesse caso, na visão dos autores, a elaboração de aparatos experimentais de baixo custo, acompanhados de material instrucional adequado – explicitando possibilidades, facilidades e dificuldades, se fazem necessárias.

No que tange aos tópicos Lei de Ohm e Corrente Elétrica, assuntos correlatos a circuitos elétricos resistivos simétricos – foco do presente trabalho, Santos e Dickman [9] puderam verificar que as abordagens experimentais, tanto real quanto virtual, quando comparada com aulas exclusivamente expositivas, foram bastante proveitosas para os alunos, promovendo uma melhor assimilação do conteúdo (verificada por meio das avaliações), quanto de aspectos atitudinais, como interesse e motivação (verificados por meio das opiniões dos próprios alunos). Segundo os mesmos autores: “uma grande vantagem da abordagem experimental com equipamentos reais é que o aluno entra em contato com a realidade, fazendo medidas e obtendo resultados não tão exatos quanto aqueles que aparecem nos exercícios propostos dos livros didáticos. Uma possível desvantagem está na dificuldade de execução, dada a confusão de ligações com os aparelhos de medidas e fios de conexão. Esta confusão com os cabos de ligação, que pode ser minimizada com orientações do professor, também é relatada no trabalho de Finkelstein, et al. [10].”

No artigo Recorrência de Concepções Alternativas sobre Corrente Elétrica em Circuitos Simples (2018), Andrade, Barbosa, Silveira e Santos [11] enumeram alguns modelos mentais que são mais recorrentes, os quais podem ocorrer concomitantemente; são eles:

- Modelo I – A corrente elétrica é emitida pela fonte (bateria, pilha ou gerador) a partir de um dos polos e é consumida durante sua passagem no circuito, de modo que sua intensidade diminui ao ultrapassar algum elemento do circuito.
- Modelo II – Correntes elétricas deixam a fonte a partir de ambos os polos, sendo usadas quando se encontram nos elementos do circuito.
- Modelo III – A intensidade da corrente é determinada pelo elemento através do qual ela está passando. Ela não pode ser influenciada por um elemento onde ainda não passou. Ou seja, a corrente é vista como algo que atravessa o circuito ponto a ponto, afetando cada elemento no momento que o atinge. Assim, uma mudança em um ponto do circuito não afeta o comportamento do circuito nos pontos anteriores.

- Modelo IV – A corrente é uma propriedade exclusiva do gerador. Ela é independente dos demais elementos do circuito.

Acreditamos que o aparato experimental, juntamente com a atividade sugerida, pode proporcionar aos estudantes confrontar previsões a respeito dos experimentos, muitas vezes baseadas em concepções alternativas, com a realidade experimental. O conflito concepção alternativa x realidade experimental pode ser um gatilho interessante para uma mudança conceitual, propiciando uma aprendizagem significativa. No presente trabalho, experimentalmente temos:

- Lâmpadas simétricas possuindo o mesmo brilho (isto é, percorridas pela mesma intensidade de corrente). Estando de “lados opostos” em relação à linha de simetria, essa realidade experimental entra em conflito com previsões baseadas no Modelo I, uma vez que, segundo esse modelo, a lâmpada do lado mais próxima ao polo da fonte ao qual o estudante considera que “sai” corrente elétrica, deveria brilhar mais.
- Ao retirarmos lâmpadas dos bocais, substituindo-as por outras de resistência elétrica diferente, ou mesmo estabelecendo curtos-circuitos, causará, de modo geral, alteração dos brilhos das demais; o que entrará em conflito com previsões baseadas no Modelo III.

No que tange às atividades experimentais envolvendo associações de resistores temos, via de regra, atividades envolvendo um número reduzido de resistores, cujos objetivos principais são: verificação das fórmulas das resistências equivalentes em série e paralelo, assim como as propriedades de tais associações (divisões de corrente elétrica e tensão elétrica); discussão dos significados das especificações nominais (potência, tensão e corrente), utilizando para tal, comparações qualitativas dos brilhos das lâmpadas, além do estudo de elementos como chaves, disjuntores [12-15]. Nesse ponto lembramos que no ensino médio, de modo geral, lâmpadas são tratadas como resistores ôhmicos.

Analisemos agora a bibliografia referente ao tema ferramentas de simetria, no contexto dos circuitos elétricos resistivos simétricos: pela análise dos principais livros-texto utilizados em nosso país, aqui incluídos os integrantes do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2018) [16-21], percebemos a ausência, no geral, de uma teoria específica. De acordo com Silveira (2012) [22]: “A *exploração da simetria nos circuitos é feita apenas sob a forma de exercícios resolvidos no fim do capítulo, sem que seja apresentada uma teoria específica. Isto acaba debilitando a compreensão deste tipo de circuito, pois fica difícil aplicar o conhecimento apresentado em outros problemas diferentes dos que foram vistos no livro. O que agrava a situação é que a técnica apresentada não se aplica a todos os problemas, podendo gerar incoerências nas resoluções.*” Essas

explicações mais detalhadas ficam restritas a bibliografias utilizadas em cursos específicos de Engenharia – que tenham como cadeira, circuitos elétricos e eletrônicos – ou mesmo, de modo sucinto, em apostilas de cursinhos de ensino médio voltados à preparação para vestibulares militares, olimpíadas de Física nacionais e internacionais e, também, em artigos científicos [5, 23–25]. Na pesquisa de Dornela e Carvalho [26], mostra-se a eficiência na otimização do cálculo da resistência equivalente de um circuito resistivo tridimensional, onde houve um aumento de 60% do acerto da questão, do grupo que utilizou argumentos de simetria, frente ao grupo que não fez uso de tal ferramenta. Diante do que foi colocado anteriormente, ao fazermos as análises de intensidade de corrente, potenciais e diferenças de potencial, além da potência elétrica dos arranjos propostos na sequência didática, utilizaremos o Teorema do Ponto Médio (de forma detalhada) de modo a não só exemplificar o uso de tal técnica, como também, explicitar a eficiência deste teorema na análise de circuitos resistivos. Dessa maneira, acreditamos que o texto será muito mais útil para o professor do ensino médio, incentivando-o, inclusive, a utilizá-lo em sala de aula.

3. Materiais e Métodos

3.1. Material utilizado

O material utilizado é de fácil acesso e baixo custo; sendo que as dimensões do circuito (arestas), em média, possuem 30 cm de comprimento. O material consiste em: (i) Fios de cobre rígido/sólido, 1,5 mm², 750 V; (ii) Bocais(soquete) de porcelana; (iii) Vergalhão de aço de bitola 4,2 mm²; (iv) Lâmpada incandescente halógena de bulbo transparente, 100 W; (v) Lâmpada incandescente halógena de bulbo transparente, 70 W; (vi) Lâmpada incandescente halógena de bulbo transparente, 42 W; (vii) multímetro, conforme ilustrado na Figura 1.



Figura 1: Material utilizado na construção dos circuitos elétricos. (Da esquerda para a direita): multímetro; na parte superior: Lâmpadas incandescentes halógenas de bulbo transparente e; na parte intermediária: vergalhão de aço de bitola 4,2 mm²; na parte inferior: bocal de porcelana.

3.2. Sequência didática

3.2.1. Conceituação/Montagem de circuitos simétricos

Inicialmente o professor pode conceituar uma figura (plana) geometricamente simétrica (vide por exemplo, Figura 2) para, em seguida, definir um circuito que apresenta uma linha de simetria (circuito bidimensional simétrico). No caso, um circuito apresenta uma linha de simetria se a distribuição dos valores das resistências do “lado esquerdo” for igual à do “lado direito” (“um lado é o reflexo do outro”).

O passo seguinte consiste em apresentar aos alunos o Teorema do Ponto Médio. Nesse ponto, consideramos de suma importância que o docente destaque para os estudantes que o **Teorema do Ponto Médio** é um teorema baseado em argumentos de simetria; destacando que, nesse caso, cabe a verificação experimental do mesmo, conforme faremos na subseção seguinte. Uma vez que esse teorema raramente aparece nos livros texto de física, faremos aqui a demonstração do TPM:

Consideremos os pontos ($M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$) pertencentes à linha de simetria (comumente denominados **pontos médios**). Sendo **A** e **A'** os terminais do circuito e, considerando o potencial elétrico V_A maior que o potencial elétrico $V_{A'}$, isto é, $V_A > V_{A'}$, sendo **M** um ponto médio genérico, por simetria temos:

$$V_A - V_M = V_M - V_{A'} \quad (1)$$

Da equação 1, temos:

$$V_M = \frac{V_A + V_{A'}}{2} \quad (2)$$

Ou seja, o potencial de um ponto médio *qualquer* é a média aritmética dos potenciais elétricos dos terminais do circuito, sendo então o conjunto dos pontos médios uma coleção de pontos equipotenciais. As equações 1 ou 2, então, são formas equivalentes de expressar (enunciar) o Teorema do Ponto Médio. Uma demonstração do TPM pode ser encontrada no livro texto Física clássica, vol. 3, eletricidade, dos autores Caio Sérgio Calçada e José Luiz Sampaio [20].

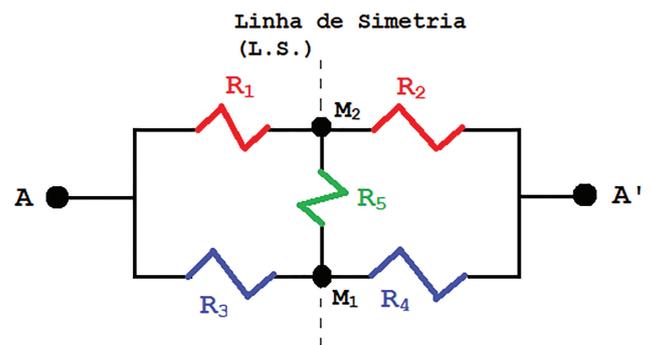


Figura 2: Circuito resistivo constituído por cinco resistores, o qual apresenta propriedade de simetria ($R_1 = R_2$ e $R_3 = R_4$).

Neste parágrafo, faremos algumas observações que consideramos importantes, mas cuja leitura julgamos ser opcional uma vez que o esquema da ponte de Wheatstone é um assunto subsequente a associações de resistores. No tocante a esse ponto, (I) O circuito apresentado na Figura 2 corresponde à conhecida ponte de Wheatstone; para o equilíbrio da ponte, a condição necessária e suficiente é que $R_1 \times R_4 = R_2 \times R_3$. Nesse caso particular, a simetria é uma condição suficiente, mas não necessária, para o equilíbrio; exemplificando: $R_1 = R_4 = 6\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ e $R_3 = 9\Omega$ fazem com que a ponte esteja em equilíbrio sem o circuito ser simétrico. (II) Frisemos que: para que os pontos M_1 e M_2 , no esquema da Figura 2, sejam equipotenciais, não basta que a resistência equivalente do ramo superior ($R_1 + R_2$) seja igual à resistência equivalente do ramo inferior ($R_3 + R_4$). Isso pode ser demonstrado experimentalmente tomando $R_1 = R_4$ e $R_3 = R_2$, com $R_1 \neq R_2$. Observando então que a lâmpada L_5 (de resistência R_5) estará acesa, ou seja, os pontos correspondentes aos seus terminais não são equipotenciais ($V_{M1} \neq V_{M2}$). A discussão precedente é importante ao se analisar de modo amplo os “caminhos equivalentes” num circuito e se alguns pontos ao longo de dois ou mais caminhos distintos são homólogos (equipotenciais).

Definido um circuito plano simétrico e apresentado o TPM, passemos então à montagem dos circuitos elétricos físicos. Nessa atividade de montagem dos circuitos, o grau de intervenção do professor dependerá dos objetivos e metodologia escolhidos por ele. Seguindo uma linha de grau de dificuldade crescente, tomaremos inicialmente figuras regulares simples, nas arestas das quais poderá(ão) existir um (1) ou no máximo dois (2) resistores, de modo que o circuito apresente uma linha de simetria. Para cada arranjo geométrico proposto (ver quadro correspondente aos arranjos no apêndice deste artigo), será seguida a sequência, onde será solicitado aos alunos que:

- (I) Partindo como base a condição dos pontos terminais estarem simétricos, identifiquem a linha de simetria, de tal modo que a figura seja geometricamente simétrica;
- (II) Façam uma representação do circuito por meio de um desenho, dispondo resistores de tal forma que o circuito seja fisicamente simétrico. Nesse momento, será feita uma discussão em sala a respeito dos itens anteriores. Estando as duas tarefas anteriores realizadas corretamente:
- (III) Será fornecido aos alunos o circuito físico, com os bocais vazios a serem ocupados pelas lâmpadas (“resistores ôhmicos”). **Montado o circuito** simétrico com o auxílio do docente, caso necessário, liga-se a fonte de tensão aos terminais do circuito, de modo que os estudantes verifiquem experimentalmente que os resistores simétricos estão com o mesmo brilho, conforme supomos por argumentos de simetria, ou seja, confrontem a previsão teórica com a realidade experimental.

Com o objetivo 3.2.1 concluído, passamos então ao objetivo 3.2.2 descrito na próxima subseção.

3.2.2. Verificação experimental do teorema do ponto médio (TPM)

Para a verificação experimental do TPM, sugerimos inicialmente uma abordagem qualitativa, pela observação da ausência de brilho das lâmpadas tendo pontos médios como terminais. Em seguida, substitui-se a lâmpada apagada por outra(s) de resistência(s) diferente(s), de modo a verificar que a ausência de brilho da lâmpada localizada entre pontos médios independe do valor da resistência da lâmpada ali localizada e que, essa troca, em nada afeta a potência das outras lâmpadas; o que justifica a possibilidade da retirada delas.

Em seguida, conforme a conveniência, o professor pode usar uma abordagem quantitativa, através da realização de medições das tensões elétricas:

- (I) Entre cada ponto médio M e os extremos do circuito, de modo a mostrar que essa diferença é igual à metade da Tensão total entre os extremos do circuito – relação essa que fundamenta o próprio TPM;
- (II) Entre os pontos médios (M_1, M_2, M_3, \dots) de modo a verificar a ausência de diferenças de potenciais elétricos (Representando por U_{XY} a diferença de potencial entre os pontos X e Y ; $U_{M1M2} = 0$, $U_{M1M3} = 0, \dots = 0 \leftrightarrow V_{M1} = V_{M2} = V_{M3}$).

No apêndice, sugerimos algumas configurações de circuitos planos simétricos; sendo que, na seção seguinte de resultados, analisaremos de modo detalhado os arranjos cujas configurações consideramos as mais complexas dentre as indicadas.

4. Resultados

Antes de iniciarmos a análise dos arranjos, faremos uma observação de caráter didático: a escolha das cores e a numeração dos resistores foi pensada de modo a facilitar a identificação da simetria existente; onde resistores simétricos (correspondentes) possuem mesma cor e número. Temos então “dois lados”: O “sem linha” e o “com linha”.

4.1. Quadrado reticulado com terminais na mesma aresta

Podemos “dividir” o circuito descrito na Figura 3 em duas partes simétricas, conforme indica a Figura 4. Sendo $U_{AA'}$ a tensão de entrada no circuito da Figura 3 (considerando o terminal A como sendo o de maior potencial elétrico $V_A > V_{A'}$), pelo teorema do ponto médio (TPM):

$$U_{AM1} = U_{AM2} = U_{AM3} = U_{AA'}/2 \quad (3)$$

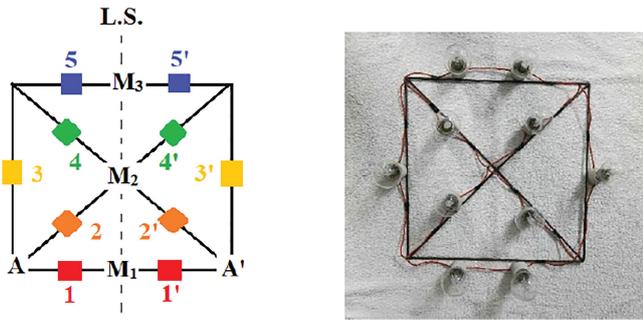


Figura 3: Quadrado reticulado com terminais na mesma aresta.

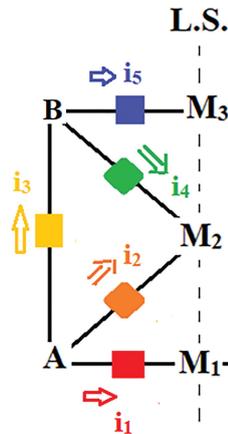


Figura 4: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Quadrado reticulado com terminais na mesma aresta, “dividido ao meio” pela linha de simetria.

Observação a ser feita: uma vez que estamos interessados em fazer comparações teóricas dos brilhos das lâmpadas (por meio da comparação das potências elétricas), trabalharemos com valores médios de tensão, corrente elétrica e potência elétrica, dado que a tensão de entrada do circuito (via tomada elétrica) é alternada, com valores eficazes usuais de 127 V e 220 V.

Representando por R a resistência elétrica de cada lâmpada (lâmpada essa que, *consideraremos* como um resistor ôhmico) e considerando os percursos AM_1 e AM_2 :

$$U_{AM1} = R \cdot i_1 \tag{4}$$

$$U_{AM2} = R \cdot i_2 \tag{5}$$

Tomando $I = U_{AA'}/R$ (o que faremos em todo o restante do texto) e substituindo a equação (3) nas equações (4) e (5):

$$i_1 = i_2 = I/2 \tag{6}$$

Da aplicação a 1ª. Lei de Kirchhoff (lei dos nós ou lei das junções) ao nó B:

$$i_3 = i_4 + i_5 \tag{7}$$

Tomando agora os percursos ABM_2 e ABM_3 :

$$U_{AM2} = U_{AB} + U_{BM2} \tag{8}$$

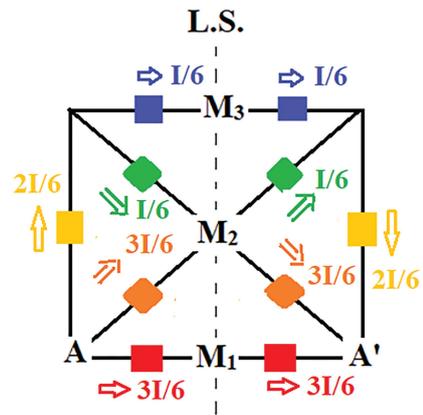


Figura 5: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Quadrado reticulado com terminais na mesma aresta.

Substituindo a equação (3) na equação (8):

$$\frac{U_{AA'}}{2} = R \cdot i_3 + R \cdot i_4 \tag{9}$$

$$U_{AM3} = U_{AB} + U_{BM3} \tag{10}$$

Substituindo a equação (3) na equação (10):

$$\frac{U_{AA'}}{2} = R \cdot i_3 + R \cdot i_5 \tag{11}$$

Do sistema formado pelas equações (7), (9) e (11):

$$i_3 = I/3, \quad i_4 = i_5 = I/6 \tag{12}$$

Por simetria, as intensidades das correntes elétricas nos resistores simétricos (correspondentes) possuem a mesma intensidade, distinguindo-se apenas pelos sentidos. No “lado do terminal de maior potencial”, as correntes se dirigem do terminal de maior potencial para os pontos médios. Já no “lado do terminal de menor potencial”, as correntes se dirigem dos pontos médios para o terminal de menor potencial; ou seja, Terminal (+) → pontos médios → Terminal (-). A percepção deste fato é de grande valia na determinação da distribuição das correntes do circuito completo pois, nesse caso, basta determinar a distribuição para uma das “metades” do circuito.

A distribuição das intensidades das correntes elétricas do arranjo Quadrado reticulado com terminais na mesma aresta está mostrada na Figura 5.

Aplicando a 1ª. Lei de Kirchhoff aos terminais A ou A', a intensidade de corrente elétrica total do circuito vale $\frac{8I}{6} = \frac{4}{3} \frac{U_{AA'}}{R}$. Da definição de resistência equivalente, $R_{eq} = \frac{3R}{4}$. Utilizando a relação $P = R \cdot i^2$ para a potência elétrica consumida, obtemos o comparativo entre as potências: $(P_1 = P_2) > P_3 > (P_4 = P_5)$, onde a proporção entre os valores das potências é: 9 : 4 : 1. Essa previsão teórica está *compatível* com as observações qualitativas dos brilhos, como indica a Figura 6.

As medidas das diferenças de potencial (ddp), assim como os potenciais teóricos (Tomando $V_{A'} = 0$; “aterando o terminal A'”) e experimentais correspondentes aos terminais do circuito, são expressas na Tabela 1.



Figura 6: Quadrado reticulado com terminais na *mesma aresta* em funcionamento ($U_{AA'} = 224 \text{ V}$).

Tabela 1: Dados experimentais do arranjo Quadrado reticulado com terminais na mesma aresta.

Ponto (terminal)	$V_A - V_{\text{ponto}}(\text{V})$ (experimental)	$V_{\text{ponto}}(\text{V})$ (experimental)	$V_{\text{ponto}}(\text{V})$ (teórico)
B	$85,5 \pm 0,9$	$138,5 \pm 3,1$	$149,3 \pm 1,4$
B'	$131,7 \pm 1,3$	$92,3 \pm 3,5$	$74,6 \pm 1,4$
M ₁	$109,8 \pm 1,1$	$114,2 \pm 3,3$	$112,0 \pm 1,1$
M ₂	$109,5 \pm 1,1$	$114,5 \pm 3,3$	$112,0 \pm 1,1$
M ₃	$108,7 \pm 1,1$	$115,3 \pm 3,3$	$112,0 \pm 1,1$

Observando a Tabela 1, verificamos uma boa concordância com o TPM, estando as diferenças de potenciais entre o terminal A e os pontos médios M₁, M₂ e M₃ ($109,3 \text{ V}$; valor médio) muito próxima da metade da diferença de potencial teórica ($U_{AA'}/2$) entre o terminal A e os pontos médios ($112,0 \text{ V}$); com o erro percentual em cerca de 3%.

A partir do esquema da Figura 4, utilizando o Teorema do Ponto Médio (TPM) e as reduções série-paralelo, podemos obter a resistência equivalente entre os pontos A e M, a qual é igual a $\frac{3R}{8}$, conforme a Figura 7. Pela simetria do circuito conclui-se que a resistência equivalente do circuito $Req_{AA'} = 2 Req_{AM}$, logo $Req_{AA'} = \frac{3R}{4}$. Cabe aqui indicar que a distribuição de corrente elétrica

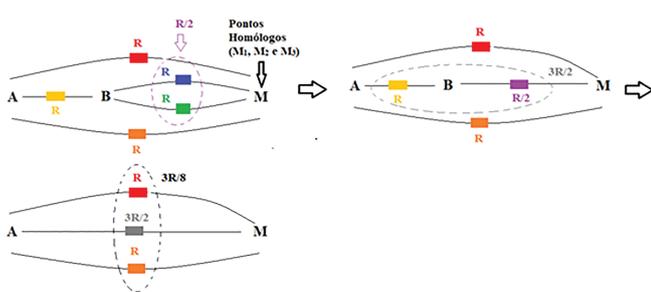


Figura 7: Simplificação do circuito elétrico esquematizado na Figura 4, utilizando o TPM e o método da redução série-paralelo.

nas lâmpadas poderia ter sido determinada a partir do circuito simplificado.

4.2. Quadrado reticulado com terminais na diagonal

A Figura 8 apresenta uma representação do quadrado reticulado com terminais na diagonal. Pelo TPM, pelas lâmpadas 4 e 5 não passa corrente elétrica (pontos médios equipotenciais M₁M₂ e M₂M₃ como terminais). Nesse caso, as mesmas podem ser retiradas do circuito no processo de simplificação, de acordo com a Figura 9.

Como por qualquer dos três caminhos que levam do terminal A ao terminal B possuem uma resistência equivalente igual a $2R$, a corrente em cada ramo vale $U_{AA'}/2R = I/2$. A resistência equivalente do circuito vale $3R/2$ e, por simetria, temos a distribuição de corrente indicada na Figura 10.

Usando novamente a relação $P = R \cdot i^2$, temos a relação entre as potências elétricas: $(P_1 = P_2 = P_3) > (P_4 = P_5 = 0)$, essa relação é compatível com a relação entre os brilhos das lâmpadas obtidos experimentalmente, conforme a Figura 11.

4.3. Hexágono reticulado com terminais localizados na mesma aresta

Usando um procedimento semelhante ao que fizemos com o arranjo do Quadrado reticulado com terminais na diagonal, podemos “dividir” o circuito descrito na

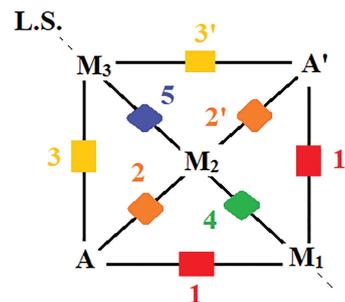


Figura 8: Quadrado reticulado com terminais na diagonal.

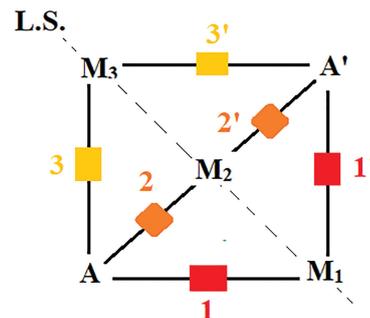


Figura 9: Simplificação do circuito Quadrado reticulado com terminais na diagonal, obtida com a retirada das lâmpadas 4 e 5.

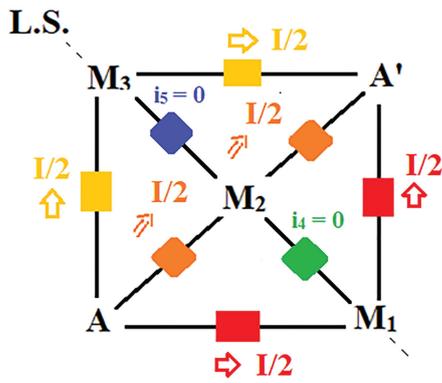


Figura 10: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Quadrado reticulado com terminais na diagonal.



Figura 11: Circuito elétrico da pirâmide de base quadrada em funcionamento ($U_{AA'} = 224 \text{ V}$), do qual o esquema do Quadrado reticulado com terminais na diagonal é o **equivalente plano**.

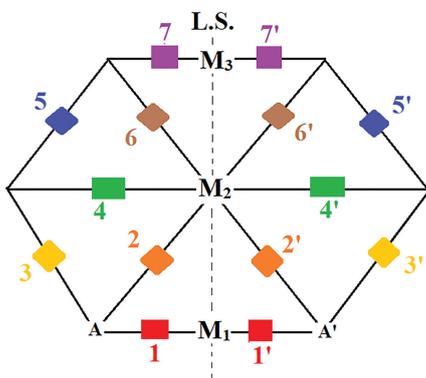


Figura 12: Hexágono reticulado com terminais localizados na mesma aresta.

Figura 12 em duas partes simétricas conforme indica a Figura 13. Pelo teorema do ponto médio (TPM):

$$U_{AM1} = U_{AM2} = U_{AM3} = U_{AA'}/2 \quad (13)$$

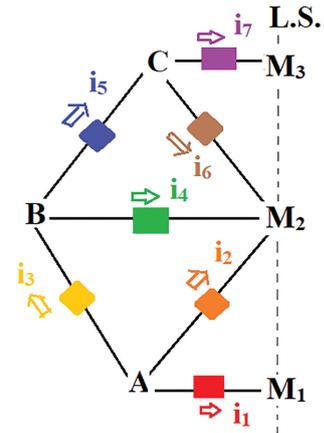


Figura 13: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados na mesma aresta, "dividido ao meio" pela linha de simetria.

Considerando os percursos AM_1 e AM_2 :

$$U_{AM1} = R \cdot i_1 \quad (14)$$

$$U_{AM2} = R \cdot i_2 \quad (15)$$

Substituindo a equação (13) nas equações (14) e (15):

$$i_1 = i_2 = I/2 \quad (16)$$

Da aplicação a 1ª. Lei de Kirchhoff (lei dos nós ou lei das junções) ao terminal B:

$$i_3 = i_4 + i_5 \quad (17)$$

Considerando os percursos CM_2 e CM_3 :

$$U_{CM2} = R \cdot i_6 \quad (18)$$

$$U_{CM3} = R \cdot i_7 \quad (19)$$

Pelo Teorema do Ponto Médio

$$V_{M1} = V_{M2}, \text{ então } U_{CM2} = U_{CM3} \quad (20)$$

Das equações (18), (19) e (20):

$$i_6 = i_7 \quad (21)$$

Da aplicação a 1ª. Lei de Kirchhoff (lei dos nós ou lei das junções) ao nó C:

$$i_5 = i_6 + i_7 \quad (22)$$

Das equações (21) e (22):

$$i_5 = 2 i_6 \quad (23)$$

Considerando os percursos BM_2 e BCM_2 :

$$R \cdot i_4 = (R \cdot i_5 + R \cdot i_6) \rightarrow i_4 = i_5 + i_6 \quad (24)$$

Das equações (23) e (24):

$$i_4 = 3 i_6 \quad (25)$$

Das equações (17), (23) e (25):

$$i_3 = 5 i_6 \tag{26}$$

Considerando o percurso ABM_2 e lembrando que pelo TPM $U_{AM2} = U_{AA'}/2$:

$$\frac{U_{AA'}}{2} = R \cdot i_3 + R \cdot i_4 \tag{27}$$

Substituindo as equações (25) e (26) na equação (27):

$$i_6 = I/16 \tag{28}$$

Retornando a equação (28) nas equações (21), (23), (25) e (26):

$$i_7 = I/16, \quad i_5 = 2I/16, \quad i_4 = 3I/16, \quad i_3 = 5I/16 \tag{29}$$

Por simetria, temos a distribuição de correntes indicada na Figura 14

Aplicando a 1ª. Lei de Kirchoff aos terminais A ou A', a intensidade de corrente elétrica total do circuito vale $\frac{21I}{16} = \frac{21}{16} \frac{U_{AA'}}{R}$, da qual $Req_{AA'} = \frac{16R}{21}$. O comparativo entre as potências é: $(P_1 = P_2) > P_3 > P_4 > P_5 > (P_6 = P_7)$, onde a proporção entre os valores das potências é: $64 : 25 : 9 : 4 : 1$. A Figura 15 apresenta uma simplificação do circuito elétrico esquematizado na Figura 13 utilizando o TPM e o método da redução série-paralelo.

4.4. Hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal

A Figura 16 apresenta o esquema do hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal. Como os procedimentos para a análise deste e do próximo arranjo são muito parecidos ao anterior, faremos uma resolução mais concisa. É possível perceber que há uma simetria de quadrante, onde $i_1 = i_7, i_2 = i_6$ e $i_3 = i_5$; nesse momento, temos então quatro incógnitas a determinar

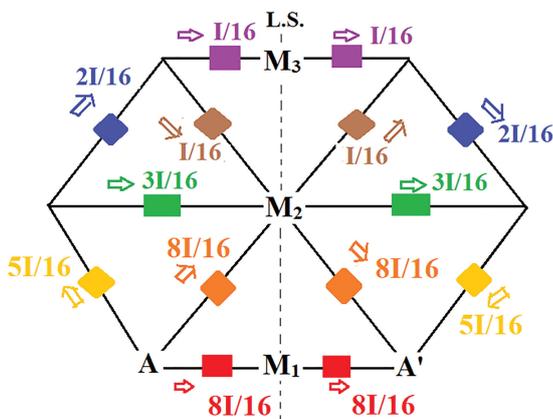


Figura 14: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados na mesma aresta.

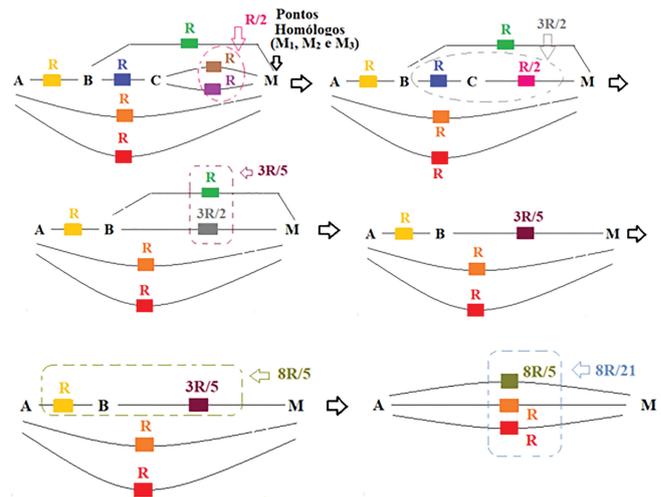


Figura 15: Simplificação do circuito elétrico esquematizado na Figura 13 utilizando o TPM e o método da redução série-paralelo.

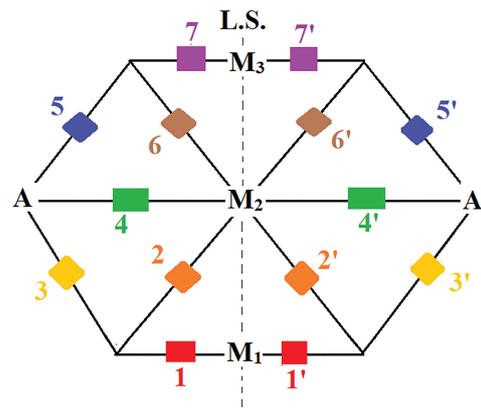


Figura 16: Hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal.

(seriam sete, caso não usássemos argumentos de simetria). As Figuras 17 e 18 apresentam, respectivamente, um esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal, “dividido ao meio” pela linha de simetria e o esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal.

Do percurso AB_1M_1 e AB_1M_2 :

$$i_3 = 2I/6 \quad e \quad i_1 = i_2 = I/6. \tag{30}$$

Do percurso AM_2 :

$$i_4 = I/2 = 3I/6. \tag{31}$$

A intensidade de corrente elétrica total do circuito vale $\frac{7I}{6} = \frac{7}{6} \frac{U_{AA'}}{R}$, de onde $Req_{AA'} = \frac{6R}{7}$. O comparativo entre as potências é: $P_4 > (P_3 = P_5) > (P_1 = P_2 = P_6 = P_7)$, onde a proporção entre os valores das potências é: $9 : 4 : 1$. A partir do esquema da Figura 17

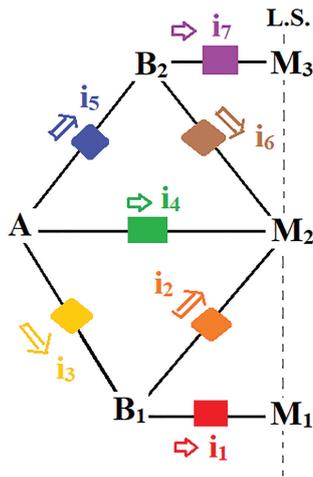


Figura 17: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal, “dividido ao meio” pela linha de simetria.

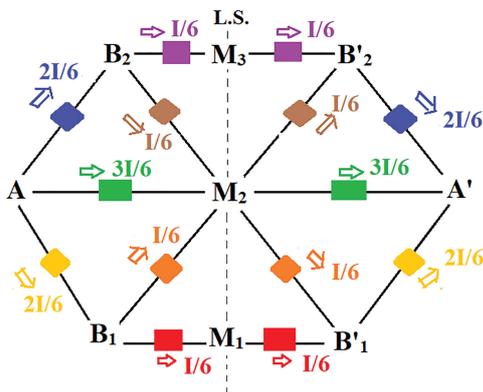


Figura 18: Esquema da distribuição de corrente elétrica do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados na diagonal.

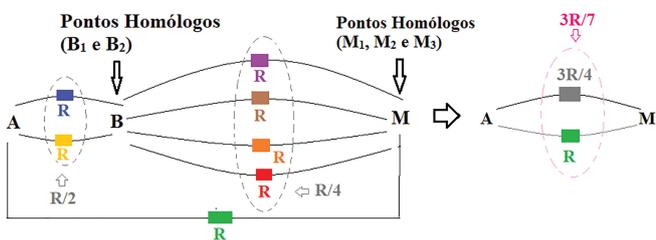


Figura 19: Simplificação do circuito elétrico esquematizado na Figura 17 utilizando o TPM e o método da redução série-paralelo.

obtem-se a resistência equivalente $Req_{AM} = \frac{3R}{7}$, de onde $Req_{AA'} = \frac{6R}{7}$, conforme a Figura 19.

4.5. Hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice consecutivo”

A Figura 20 apresenta o hexágono reticulado com terminais localizados no segundo vértice consecutivo.

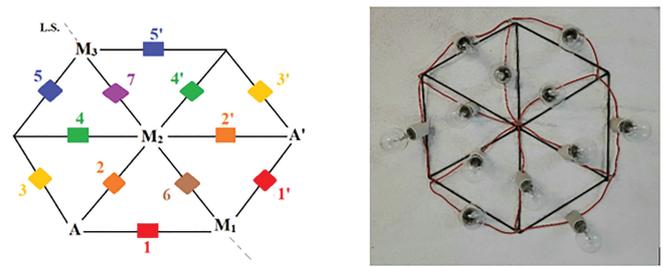


Figura 20: Hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice consecutivo”.

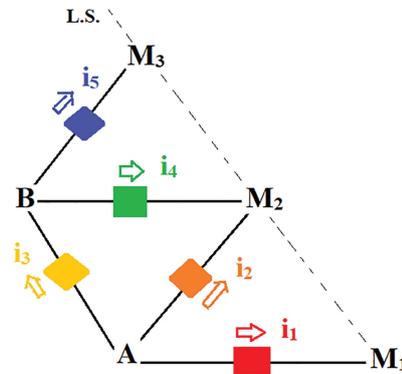


Figura 21: Esquema da distribuição de corrente do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice”, “dividido ao meio” pela linha de simetria.

Uma vez que pelas lâmpadas 6 e 7 (tendo os pontos médios equipotenciais M_1M_2 e M_2M_3 como terminais, respectivamente) não passa corrente, podemos retirá-las do circuito no processo de análise. A Figura 21 apresenta um esquema da distribuição de corrente do arranjo hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice”, “dividido ao meio” pela linha de simetria.

Por semelhança com o que foi feito na análise do arranjo Hexagonal reticulado com terminais na diagonal, temos os seguintes valores para as intensidades de corrente elétrica: $i_1 = i_2 = I/2 = 3I/6$; $i_3 = 2I/6$; $i_4 = i_5 = I/6$; $i_6 = i_7 = 0$. A Figura 22 apresenta um esquema da distribuição de corrente elétrica do circuito elétrico do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice”.

A intensidade de corrente elétrica total do circuito vale $\frac{8I}{6} = \frac{4U_{AA'}}{3R}$, de onde $Req_{AA'} = \frac{3R}{4}$. O comparativo entre as potências é: $(P_1 = P_2) > P_3 > (P_4 = P_5) > (P_6 = P_7 = 0)$, onde a proporção entre os valores das potências é: $9 : 4 : 1$. Essa relação é compatível com a relação entre os brilhos das lâmpadas obtidos experimentalmente, conforme a Figura 23. A partir do esquema da Figura 21 obtém-se a resistência equivalente $Req_{AM} = \frac{3R}{8}$, de onde $Req_{AA'} = \frac{3R}{4}$, conforme a Figura 23. A Figura 24 ilustra o circuito hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice”

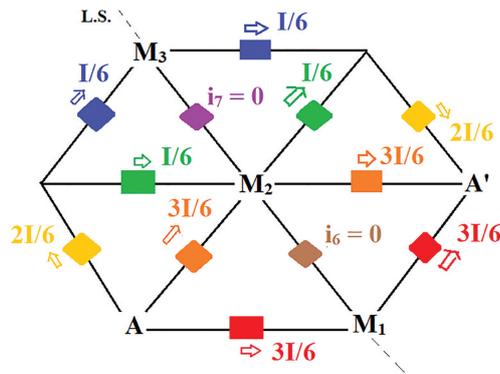


Figura 22: Esquema da distribuição de corrente elétrica do circuito elétrico do arranjo Hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice”.

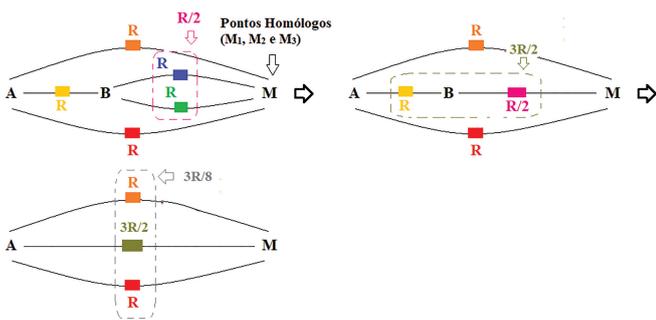


Figura 23: Simplificação do circuito elétrico esquematizado na Figura 21 utilizando o TPM e o método da redução série-paralelo.



Figura 24: Circuito Hexágono reticulado com terminais localizados no “segundo vértice consecutivo” em funcionamento ($U_{AA'} = 224 \text{ V}$).

consecutivo” em funcionamento.

As medidas das diferenças de potencial (ddp), assim como os potenciais teóricos (Tomando $V_{A'} = 0$; “aterando o terminal A’”) e experimentais correspondentes aos terminais do circuito, são expressas na Tabela 2.

Assim como ocorreu com o arranjo Quadrado reti-

Tabela 2: Dados experimentais do arranjo Hexágono reticulado com terminais no “segundo vértice consecutivo”.

Ponto (terminal)	$V_A - V_{\text{ponto}}$ (V) (experimental)	V_{ponto} (V) (experimental)	V_{ponto} (V) (teórico)
B	$86,7 \pm 0,9$	$137,3 \pm 3,1$	$149,3 \pm 1,4$
B'	$134,2 \pm 1,3$	$89,8 \pm 3,5$	$74,6 \pm 1,4$
M ₁	$110,9 \pm 1,1$	$113,1 \pm 3,3$	$112,0 \pm 1,1$
M ₂	$110,7 \pm 1,1$	$113,3 \pm 3,3$	$112,0 \pm 1,1$
M ₃	$110,8 \pm 1,1$	$113,2 \pm 3,3$	$112,0 \pm 1,1$

culado com terminais na mesma aresta, da observação da Tabela 2, verificamos uma boa concordância com o TPM, estando as diferenças de potenciais entre o terminal A e os pontos médios M₁, M₂ e M₃ (113,2 V; valor médio) muito próxima da metade da diferença de potencial teórica ($U_{AA'}/2$) entre o terminal A e os pontos médios (112,0 V); com o erro percentual em cerca de 1%.

5. Considerações Finais

No presente trabalho foi desenvolvida uma sequência didática a qual, fazendo uso de um aparato de baixo custo e fácil acesso, poderá contribuir para a conceituação/montagem de circuitos elétricos resistivos simétricos assim como, ilustrar de forma concreta o Teorema do Ponto Médio (TPM), juntamente com considerações que embasaram a elaboração de tal teorema. O experimento possui uma ludicidade que, em grande parte, está associada ao uso de lâmpadas como resistores – permitindo uma visualização bastante direta (qualitativamente) das simetrias existentes nos arranjos propostos. A sequência didática foi pensada pedagogicamente para ser o “primeiro passo; aula de número um” de circuitos elétricos simétricos, apresentando o tema e trabalhando de uma forma concreta e, frisando novamente, lúdica, em um assunto tido pelos educandos como muito matematizado. Entendemos que a atividade aqui proposta pode ser utilizada em diversos cursos e níveis de ensino, por exemplo, no médio, técnico e superior. Com relação ao ensino médio regular – para o qual foi pensada a proposta apresentada neste artigo, o foco foi basicamente conceitual/qualitativo. Já com relação ao ensino técnico e, principalmente, o superior, é possível uma atividade bem mais sofisticada, com uma abordagem quantitativa mais elaborada, acompanhada de tratamento de erros etc. A importância do uso de argumentos de simetria como ferramenta pedagógica na resolução de problemas (no caso específico, simplificação-análise de circuitos elétricos resistivos) ficou evidenciada na análise dos arranjos Quadrados e Hexágonos reticulados; não só do ponto de vista qualitativo, como também do ponto de vista quantitativo (redução expressiva do número de incógnitas intensidades de corrente elétrica). Foram criados padrões que auxiliaram no conceito de organização, pela identificação de linhas de simetria e formas similares [5]. Pequenas variações em relação aos valores teóricos eram esperadas, uma vez que os valores

teóricos foram obtidos considerando as lâmpadas como resistores ôhmicos, hipótese esta que não é verdadeira, tratando-se de uma aproximação. Finalizando, numa próxima etapa esperamos aplicar em sala de aula a atividade proposta nesse artigo.

Material suplementar

O seguinte material suplementar está disponível online: [Apêndice](#)

Referências

- [1] J.C.A. Barata e P.A. Nussenzveig, *O papel da simetria na Física*, disponível em: <https://impa.br/noticias/no-blog-ciencia-matematica-o-papel-da-simetria-na-fisica/>, acessado em 02/12/2020.
- [2] F. Caruso, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **30**, 3309 (2008).
- [3] S. Weinberg, *Dreams of a Final Theory: The Scientist's Search for the Ultimate Laws of Nature* (Vintage Books, New York, 1993), p. 3.
- [4] C.T. Hill e L.M. Lederman, *The Physics Teacher* **38**, 348 (2000).
- [5] A.J. Mania e E. Mania, *Física na Escola* **9**, 33 (2008).
- [6] BRASIL. Lei nº 13.796, de 03 de setembro de 2019. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2019-2022/2019/Lei/L13796.htm
- [7] A.T. Borges, *Caderno Brasileiro de ensino de Física* **19**, 291 (2002).
- [8] R.F. White, *International Journal of Science Education* **18**, 761 (1996).
- [9] J.C. Santos e A.G. Dickman, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**, e20180161 (2019).
- [10] N.D. Finkelstein, W.K. Adams, C.J. Keller, P.B. Kohl, K.K. Perkins, N.S. Podolefsky, S. Reid e R. LeMaster, *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* **1**, 010103 (2005).
- [11] F.A.L. Andrade, G.F. Barbosa, F.L. Silveira e C.A. Santos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e3406 (2018).
- [12] F.C.B. Lima, G.F. Barbosa, F.L. Silveira e C.A. Santos, *Revista do Professor de Física* **3**, 9 (2019).
- [13] R.G.O. Silva, G.L. Ribeiro Filho e R.A.S.R. Franco, *Revista Interterritórios* **6**, 161 (2020).
- [14] M.P. Souza Filho, S.L.B. Boss, J. Mianutti e J.J. Caluzi, *Física na Escola* **12**, 289 (2011).
- [15] C.E. Hennies, W.O.N. Guimarães e J.A. Roversi e H. Vargas, *Problemas Experimentais em Física* (Editora da Unicamp, Campinas, 1988), v. 2, 2ª ed.
- [16] R.D. Helou, J.B. Gualter e V.B. Newton, *Tópicos de física* (Saraiva, São Paulo, 2007), v. 1, 20ª ed.
- [17] B.A. Alvarenga e A.R.L. Máximo, *Curso de Física* (Scipione, São Paulo, 2011), v. 1.
- [18] A. Gaspar, *Compreendendo a Física* (São Paulo, Ática, 2011), v. 1.
- [19] F.J. Ramalho, G.F. Nicolau e P.A. Toledo, *Os Fundamentos de Física* (Moderna, São Paulo, 2007), v. 1, 9ª ed.
- [20] C.S. Calçada e J.L. Sampaio, *Física Clássica* (Atual, São Paulo, 1998), v. 3.
- [21] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *PNLD 2018: Física – guia de livros didáticos – ensino médio*. Brasília, 2017. Disponível em <https://www.fnde.gov.br/index.php/ce-ntrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=10739:guia-pnld-2018-fisica>.
- [22] V.P. Silveira, *Simetria em circuitos lineares de resistores*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (2012).
- [23] Z. Yongzhao e Z. Shuyan, *Phys. Educ.* **33**, 32 (1998).
- [24] B. Allen e T. Liu. *The Physics Teacher* **53**, 75 (2015).
- [25] M. Kagan, arXiv:1507.01873v1 (2015).
- [26] F.L. Dornela e D.H.Q. Carvalho, *Revista Científica Semana Acadêmica* **64**, 1 (2014).