

Espalhamento elétron-pósitron

Electron-positron scattering

Erick Otavio Aquino Landim¹, Armando Flavio Rodrigues^{*1}

¹Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, RJ, Brasil.

Recebido em 17 de setembro de 2021. Revisado em 20 de janeiro de 2022. Aceito em 10 de março de 2022.

Este trabalho tem como foco estudar o espalhamento elétron-pósitron. Utilizando os postulados da mecânica quântica, teoria de espalhamento e funções de Green, é mostrada a forma da matriz-S e sua relação com seções de choque. Além disso, são apresentadas algumas regras de Feynman que são utilizadas para encontrar a seção de choque de um espalhamento elétron pósitron resultando em um par múon-antimúon e a seção de choque referente ao mesmo espalhamento, porém gerando dois fótons. A técnica também é utilizada para escrever as seções de choque de processos de produção do bóson de Higgs através de um espalhamento elétron pósitron, o Higgs-strahlung e a fusão WW. É apresentado então um breve texto sobre os programas ILC e CLIC e sua relação com uma nova física.

Palavras-chave: Espalhamento, Teoria Quântica de Campos.

This paper focuses on studying electron-positron scattering. Using the postulates of quantum mechanics, scattering theory and Green's functions, the shape of the S-matrix and its relation to cross sections is shown. In addition, some Feynman rules are presented that are used to find the cross section of an electron-positron scattering that results in a muon-antimuon pair and also the cross section of the same scattering process, but with the outcome of two photons. The technique is also used to write the cross sections of some Higgs boson production processes, such as the Higgs-strahlung and the WW fusion. Finally it is presented a short text on the ILC and CLIC programs and their relation to new physics.

Keywords: Scattering, Quantum Field Theory.

1. Introdução

Imediatamente após Paul Adrien Maurice Dirac descobrir (ou inventar) sua equação $(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0$, em 1928, foram reconhecidas duas propriedades da partícula com massa m (o elétron):

- O spin resultava diretamente das equações, que “faziam surgir” as matrizes de Pauli já conhecidas, as quais representavam exatamente os operadores correspondentes às componentes S_x, S_y, S_z , do operador de spin \mathbf{S} .
- A energia apresentava um espectro com valores negativos, inesperados, e, à primeira vista, inconvenientes.

A primeira propriedade foi celebrada como um avanço da Física teórica quântica. Ao contrário da segunda, execrada pelos pilares da comunidade científica, como Wolfgang Pauli e Werner Heisenberg, por acarretar, segundo eles, a derrocada dos modelos atômicos vigentes. Eis que, em 2 de agosto de 1930, o físico estadunidense Carl David Anderson observa uma foto tirada em uma câmara de vapor sujeita à radiação cósmica, e identifica uma partícula com a mesma massa do elétron de Dirac, mas

com a carga contrária. Estava descoberta a antimatéria, prevista dois anos antes pela equação de Dirac, o que resultou na atribuição do prêmio Nobel ao seu autor em 1933, “pela descoberta de novas formas produtivas da teoria atômica” – seja lá o que isto quer dizer. Nos dias atuais as interações entre as duas partículas descobertas pela equação de Dirac estão “bombando” no território da Física – experimental e teórica –, com perspectivas de virem a ser um campo fértil de pesquisas nos próximos 20–30 anos. Os experimentos que vêm sendo realizados há décadas no LHC/CERN ainda não se mostraram capazes de revelar uma Nova Física, restringindo-se à exploração – e confirmação cabal, é bom que se diga – do Modelo Padrão de Partículas. Novos projetos de aceleradores lineares de partículas – o ILC/International Linear Collider (no Japão) e o CLIC/Compact Linear Collider (no CERN) – estão sendo desenvolvidos, desde 2013 e 2015, respectivamente, e construídos, para estudar mais acuradamente as interações e^+e^- , com três metas principais:

- Descrever com mais precisão as propriedades do bóson de Higgs;
- Refinar os dados sobre o quark top – o mais pesado –, por exemplo, medindo diretamente seu acoplamento de Yukawa com o campo de higgs;
- Identificar indícios de uma Nova Física.

* Endereço de correspondência: armando.flavio@gmail.com

O trabalho de conclusão de curso do bacharelado em Física no Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Fluminense (UFF/ICEX) Erick Landim, apresentado a seguir, poderá servir, por sua excelência, como referência para alunos e professores de Física em geral nessa promissora área de pesquisa teórica e experimental. Reproduzo abaixo, em tradução livre, algumas conclusões de Zarneck em seu trabalho [1]: “*Colisores lineares e^+e^- com altas energias oferecem um programa de pesquisa rico e diverso: determinação precisa de acoplamentos de Higgs, determinação precisa da massa do quark top, e outras propriedades. Assim como restrições rigorosas a muitos cenários de Nova Física, por buscas indiretas em escalas de massa até 100TeV, e prospecções para observação direta de Nova Física em vários outros cenários. Graças às escolhas diferentes de energias e aos cenários de experimentação, os dois projetos, ILC e CLIC, são, em grande medida, complementares.*”

2. Espalhamento Quântico Não Relativístico

2.1. Espalhamento por um potencial independente do tempo

Enquanto no regime clássico podemos determinar simultaneamente com precisão a velocidade e posição da partícula, no regime quântico isso já não é possível devido ao princípio de incerteza de Heisenberg [2], $\Delta x \Delta p \geq 1/2$, considerando um o sistema de unidades onde $c = \hbar = 1$. Portanto trataremos as partículas como ondas. Por exemplo, uma onda plana dada por $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ representa uma partícula livre [3].

Vamos agora considerar uma partícula sujeita a um dado potencial $V(r)$ no espaço de coordenadas. Utilizando a equação de Schrödinger [4] independente do tempo, temos:

$$\left[E - V(\vec{r}) + \frac{\nabla^2}{2m} \right] \psi(\vec{r}) = 0. \quad (1)$$

Como a equação de Schrödinger é uma equação diferencial parcial linear, o princípio de superposição vale, e portanto, podemos escrever uma dada solução ψ como a soma de duas outras ψ_{inc} e ψ_{esp} , representando, respectivamente, uma onda incidente e outra espalhada

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \psi_{inc}(\vec{r}) + \psi_{esp}(\vec{r}). \quad (2)$$

Considerando que a partícula incidente é livre, temos que ψ_{inc} é representada por uma onda plana. Supondo que a onda que sai do sistema é esférica, podemos escrever o seguinte tentativa de solução para a equação (1):

$$\psi^+(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} + f^+(p\hat{r}, \vec{p}) \frac{e^{ipr}}{r}. \quad (3)$$

Definimos $f(p, \theta) \equiv f^+(p\hat{r}, \vec{p})$ como a amplitude de espalhamento do processo. A amplitude de espalhamento nos dirá qual o efeito do potencial na partícula.

Utilizando a notação de braket de Dirac [5], podemos escrever a equação de Schrödinger de um estado $|\psi_E^\pm\rangle$ como:

$$H |\psi_E^\pm\rangle = E |\psi_E^\pm\rangle. \quad (4)$$

Podemos ainda decompor o operador hamiltoniano em duas partes, uma parte livre e uma de interação, ou seja,

$$H = H_0 + V. \quad (5)$$

Desta forma, obtemos duas possíveis equações, uma onde a interação V está presente

$$(E - H_0) |\psi_E^\pm\rangle = V |\psi_E^\pm\rangle. \quad (6)$$

E uma equação de partícula livre

$$(E - H_0) |\varphi_E\rangle = 0. \quad (7)$$

Desta forma, combinando as duas obtemos:

$$|\psi_E^\pm\rangle = |\varphi_E\rangle + (E - H_0)^{-1} V |\psi_E^\pm\rangle. \quad (8)$$

Seja V um potencial diagonal, ou seja

$$\langle \vec{r}' | V | \vec{r} \rangle = V(\vec{r}) - \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}). \quad (9)$$

Multiplicamos (8) à esquerda por $\langle \vec{r}' |$, utilizando que $\int d^3r |r\rangle \langle r| = \mathbb{I}$ [3] e aplicando a diagonalidade de V temos

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \psi_E^\pm \rangle &= \langle \vec{r}' | \varphi_E \rangle + \int d^3r' \langle \vec{r}' | (E - H_0)^{-1} | \vec{r}' \rangle \\ &\quad \times V(\vec{r}') \langle \vec{r}' | \psi_E^\pm \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Se considerarmos $H_0 |\vec{p}\rangle = \frac{\vec{p}^2}{2m} |\vec{p}\rangle$ e $|\psi_E\rangle = |\vec{p}\rangle$ e identificarmos $(E - H_0)^{-1}$ como a função de Green da partícula livre [6] no espaço de momento, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | G_0(E) | \vec{p} \rangle &= \langle \vec{p}' | (E - H_0)^{-1} | \vec{p} \rangle \\ &= [E - \vec{p}^2/2m]^{-1} 2\pi \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}), \end{aligned} \quad (11)$$

onde o termo entre colchetes equivale ao hamiltoniano da partícula. Aplicando a transformada de Fourier para levar ao espaço de coordenadas [7],

$$\begin{aligned} G_0(\vec{r}, \vec{r}'; E) &= \langle \vec{r}' | (E - H_0)^{-1} | \vec{r} \rangle \\ &= 4\pi m \int \frac{\langle \vec{r}' | \vec{k} \rangle d^3k \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Analisando o integrando, vemos que possui polos em $\vec{p}^2 = \vec{k}^2$, para evitar singularidades nesses pontos, iremos adicionar um termo $i\epsilon$ pequeno e positivo, de tal forma que

$$G_0^\pm = (E - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}. \quad (13)$$

Consideremos agora que $G_0^\pm(\vec{r}, \vec{r}'; E) = 2m(2\pi)^{-3} I^\pm$, onde I^\pm é uma integral tridimensional no espaço de momento com $d^3k = k^2 dk d\Omega$,

$$I^\pm = \int_0^\infty \frac{dk \vec{k}^2}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 \pm i\epsilon} \int d\Omega_k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}. \quad (14)$$

Como Ω_k é um ângulo sólido a segunda integral vale

$$\int d\Omega_k e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} = \frac{2\pi}{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} [e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} - e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}]. \tag{15}$$

Ou seja,

$$I^\pm = \frac{2\pi}{i|\vec{r}-\vec{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 \pm i\epsilon} e^{i\vec{k}|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{16}$$

Para avaliar esta integral precisamos estendê-la para o plano complexo, utilizando como denominador

$$\vec{p}^2 - \vec{k}^2 \pm i\epsilon = -[k - \sqrt{\vec{p}^2 \pm i\epsilon}][k + \sqrt{\vec{p}^2 \pm i\epsilon}]. \tag{17}$$

$$\approx -[k - (p \pm i\epsilon)][k + (p \pm i\epsilon)]. \tag{18}$$

Temos ainda que integrais I^+ e I^- são analíticas no subplano superior ($\text{Im } k > 0$), a partir daí podemos aplicar o teorema dos resíduos [7], utilizando o contorno da Figura 1 para I^+ e o contorno da Figura 2 para I^- , que nos dá

$$I^\pm = 2\pi i \sum \text{Res} I^\pm = -i\pi e^{\pm i\vec{p}|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{19}$$

Com isso obtemos:

$$G_0^\pm(\vec{r}, \vec{r}'; E) = -\frac{2m}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{\pm i\vec{p}|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{20}$$

No limite $r \rightarrow \infty$, temos

$$G_0^\pm(\vec{r}, \vec{r}'; E) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{2m}{4\pi r} e^{ipr} e^{\mp i\vec{p}' \cdot \vec{r}'}. \tag{21}$$

Substituindo (21) na forma assintótica de (10) temos

$$\psi_E^\pm(E) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} - \frac{2m}{4\pi r} e^{\pm i\vec{p}r} \int d^3r' e^{\mp i\vec{p}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi_E^\pm(\vec{r}'). \tag{22}$$

Comparando com (3), temos que a amplitude de espalhamento é dada por

$$f^\pm(\vec{p}', \vec{p}) = -\frac{2m}{4\pi} \int d^3r' e^{\mp i\vec{p}' \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi_E^\pm(\vec{r}'). \tag{23}$$

Vamos agora, com esta expressão para a amplitude de espalhamento, definir o que chamamos de matriz T, que generaliza a interação V.

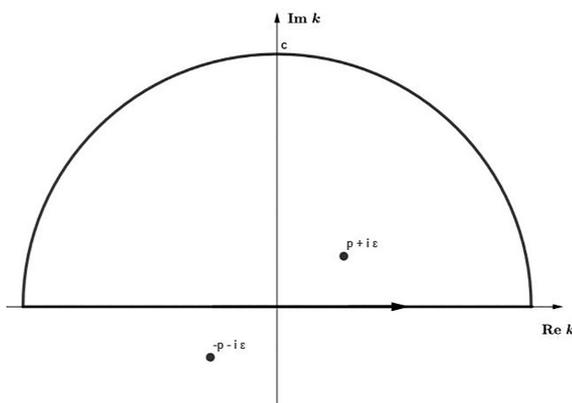


Figura 1: Contorno para I^+ .

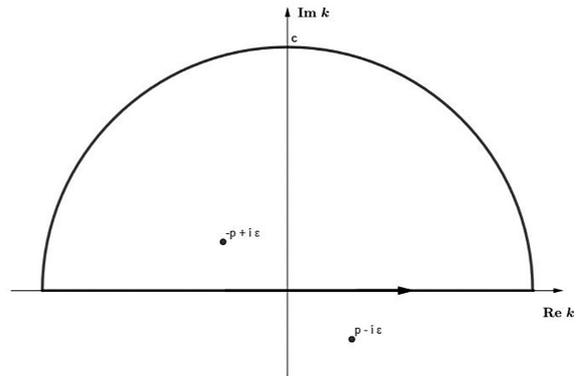


Figura 2: Contorno para I^- .

2.2. Matriz T

A partir da equação (23), podemos também definir a amplitude de espalhamento como a transformada de Fourier da interação V

$$f_{\vec{p}', \vec{p}} = f^+(\vec{p}', \vec{p}) = \langle \vec{p}' | V | \vec{p} \rangle. \tag{24}$$

Podemos ainda escrever, considerando o elemento de matriz de um dado operador T

$$f_{\vec{p}', \vec{p}} = -\frac{m}{2\pi} \langle \vec{p}' | T | \vec{p} \rangle. \tag{25}$$

Comparando as duas expressões vemos que

$$T | \vec{p} \rangle \equiv V | \vec{p} \rangle, \tag{26}$$

ou ainda:

$$T | \varphi \rangle = V | \psi^+ \rangle. \tag{27}$$

Desta forma, o operador T parece ser uma generalização do potencial V. Podemos, da mesma forma, escrever uma generalização da função de Green da partícula livre G_0^+

$$G^\pm(E) = (E - H \pm i\epsilon)^{-1}. \tag{28}$$

Vamos então agora encontrar as equações integrais relacionadas a G^+ , T e $|\psi_E^+\rangle$.

2.3. Equações integrais de Lippmann-Schwinger

A equação (8) com a condição de contorno prescrita $i\epsilon$ é o exemplo de uma equação integral. Utilizar a condição de contorno $i\epsilon$ na equação (8) nos dá

$$|\psi_E^\pm\rangle = |\varphi_E\rangle + G_0(E)V|\psi_E^\pm\rangle. \tag{29}$$

Que é a equação de Lippmann-Schwinger [8]. Multiplicando a (29) à esquerda por V e aplicando (27), temos uma equação de autovalor, de onde podemos tirar a seguinte expressão:

$$T(E) = V + VG_0^+(E)T(E). \tag{30}$$

Utilizando a identidade $A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1}$, considerando que $A = G^\pm$ e $B = G_0^\pm$, temos a relação entre G e G_0

$$G^\pm(E) = G_0^\pm(E) + G_0^\pm(E)VG^\pm(E). \tag{31}$$

$$= G_0^+(E) + G^\pm(E)VG_0^\pm(E). \tag{32}$$

Estas equações serão muito úteis posteriormente. Vamos agora estudar o caso de uma interação dependente do tempo.

2.4. Funções de Green dependentes do tempo

As funções de onda e funções de Green dependentes do tempo devem satisfazer as equações de Schrödinger

$$(i\partial_t - H_0) |\varphi(t)\rangle = (i\partial_t - H) |\psi(t)\rangle = 0. \tag{33}$$

$$(i\partial_{t'} - H_0)G_0(t' - t) = (i\partial_{t'} - H)G(t' - t) = \delta(t' - t). \tag{34}$$

A menos de condições de contorno, as equações integrais dependentes do tempo análogas às equações de Lippmann-Schwinger são

$$|\psi(t')\rangle = |\varphi(t')\rangle + \int G_0(t' - t)V(t) |\psi(t)\rangle dt. \tag{35}$$

$$G(t' - t) = G_0(t' - t) + \int G_0(t' - t'')V(t'')G(t'' - t)dt''. \tag{36}$$

2.5. Causalidade

É natural impor uma condição de contorno que manifeste a causalidade. Ou seja

$$G^+(t' - t) = G_0^+(t' - t) = 0 \text{ para } t' < t. \tag{37}$$

Considerando a função degrau de Heaviside

$$\theta(t' - t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t' > t \\ 0 & \text{se } t' < t \end{cases}. \tag{38}$$

Com a propriedade

$$\partial_t \theta(t' - t) = \delta(t' - t). \tag{39}$$

Vemos que ao multiplicar essa função pela função de Green, apenas os valores de $t' > t$ produzirão um resultado não nulo. Portanto é uma boa forma de representar causalidade.

As soluções de (34) são

$$G^+(t' - t) = -i\theta(t' - t)e^{-iH(t' - t)}. \tag{40}$$

$$G_0^+(t' - t) = -i\theta(t' - t)e^{-iH_0(t' - t)}. \tag{41}$$

Pelos postulados da mecânica quântica, ao aplicarmos um operador $e^{-iH(t' - t)}$ a algum estado $|\phi\rangle$, realizamos a evolução deste estado, ou propagamos este estado

no tempo [3]. Por este motivo, as funções de Green para partícula livre atuam como propagadores. Considerando que uma função qualquer da energia $F(E)$ pode ser representada como $f(t)$ e vice-versa por meio da transformada de Fourier, a nomenclatura de propagador também vale para $G_0^+(E)$.

2.6. Propagadores

Como as funções de Green agem como propagadores, iremos seguir o desenvolvimento de Feynman [9] e utilizar o princípio de Huygens, ou seja, cada ponto em uma frente de onda é uma nova fonte de propagação [10].

Portanto, escrevemos para $t' > t$

$$\psi(\vec{r}', t') = \int d^3r iG^+(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t). \tag{42}$$

$$\varphi(\vec{r}', t') = \int d^3r iG_0^+(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)\varphi(\vec{r}, t), \tag{43}$$

onde $G^+(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)$ é o elemento de matriz da função de Green causal no espaço de coordenadas.

Conforme visto anteriormente, a função degrau de Heaviside é uma maneira formal de impor causalidade, portanto, dizer que a onda se propaga para frente em uma forma causal é equivalente a multiplicar o lado de mão esquerda de (42) e (43) por $\theta(t' - t)$. Como ψ e φ satisfazem a equação de Schrödinger, chamamos $iG^+(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) \equiv iG^+(x'; x)$ um propagador causal de Feynman. Para interações dependentes do tempo, o propagador causal satisfaz:

$$iG^+(x'; x) = iG_0^+(x'; x) + \int d^4x'' iG_0^+(x', x'')[-iV(x'')] \times iG^+(x''; x). \tag{44}$$

Para demonstrar que as (42)(43) são consistentes com (44), nós garantimos que a condição $t' > t$ é satisfeita invocando-se o limite de ondas planas conforme $t \rightarrow \infty$ (também é válida para $t \rightarrow -\infty$)

$$\psi(\vec{r}, t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \varphi(\vec{r}, t). \tag{45}$$

Que simplifica estados em que a partícula está inicialmente livre antes de se espalhar em um tempo finito $t > -\infty$. Substituindo (44) e (45) na primeira equação das (42)(43) para $t \rightarrow \infty$ nos dá

$$\psi(\vec{r}', t') \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \varphi(x') + \int d^3r iG_0^+(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)\varphi(\vec{r}, t) + \int d^3r G_0^+(x'; x'')V(x'')iG^+(x''; \vec{r}, t)\varphi(\vec{r}, t). \tag{46}$$

Usando que iG_0^+ propaga φ via (43) enquanto iG^+ propaga ψ por meio de (42), vemos que (46) se torna o análogo dependente do tempo da equação de Lippmann-Schwinger

$$\psi(x') = \varphi(x') + \int d^4x iG_0^+(x'; x)[-iV(x)]\psi(x). \tag{47}$$

Estes resultados se aplicam tanto para teoria de Schrödinger não relativística quanto para mecânica de ondas relativísticas.

2.6.1. Propagadores para outras equações

Nas seções anteriores, obtivemos o propagador para as equações de Schrödinger dependentes e independentes do tempo. Iremos agora buscar funções de Green que vão agir como propagadores para as equações de Dirac [11] e Klein-Gordon [12][13].

A função de Green para a equação de Klein-Gordon de spin-0, $G_0^+(x'; x) \rightarrow \Delta_F(x' - x)$, satisfaz:

$$(\square' + m^2)\Delta_F(x' - x) = -\delta^4(x' - x). \tag{48}$$

Utilizando a transformada de Fourier, temos:

$$\Delta_F(x) = \int d^4p \frac{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{49}$$

As implicações da prescrição $i\epsilon$ de Feynman podem ser trabalhadas no plano complexo p_0 com os polos em $\pm p_0 = E - i\epsilon$, onde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, para realizar a integração basta fechar um contorno semicircular no semiplano p_0 inferior se $t > 0$, enquanto para $t < 0$ o contorno é fechado no semiplano p_0 superior. Esta escolha garante que a exponencial $exp(t \text{Im}\{p_0\})$ leve integral para zero ao longo dos contornos infinitos. Cada contorno fechado circunda um polo, então, usando o teorema dos resíduos, temos:

$$i\Delta_F(x) = \frac{i2\pi i}{2\pi} \left[- \int \frac{d^3p}{2E} \theta(t) e^{-iEt} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} + \int \frac{d^3p}{-2E} \theta(-t) e^{iEt} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \right]. \tag{50}$$

$$= \int \frac{d^3p}{2E} [\theta(t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \theta(-t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}]. \tag{51}$$

A última decomposição diz que $i\Delta_F$ propaga $\varphi_+ = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ à frente no tempo através de $\theta(t)$, enquanto propaga $\varphi_- = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ para trás no tempo através de $\theta(-t)$. Na linguagem do princípio de Huygens, os análogos covariantes de (42)(43) são

$$\theta(t' - t)\phi_+(x') = \int d^3x i\Delta_F(x' - x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_+(x). \tag{52}$$

$$-\theta(t' - t)\phi_-(x') = \int d^3x i\Delta_F(x' - x) i\overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_-(x). \tag{53}$$

Uma situação similar ocorre para o propagador causal da partícula livre de spin- $\frac{1}{2}$ $iS_F(x'; x) = iS_F(x' - x)$. Como uma função de Green de partícula livre ela satisfaz

$$(i\cancel{\partial} - m)S_F(x'; x) = \delta^4(x' - x). \tag{54}$$

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p(\cancel{p} + m)}{\vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{55}$$

onde a notação $\cancel{\partial}$ significa $\partial^\mu \gamma_\mu$. Adotando os mesmos contornos para p_0 adotados anteriormente, temos

$$iS_F(x) = \int \frac{d^3p}{2E} [\theta(t)(\cancel{p} + m)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \theta(-t)(-\cancel{p} + m)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}]. \tag{56}$$

Que propagam os bi espinores de energia positiva ψ_+ para frente no tempo e os de energia negativa para trás no tempo, da forma

$$\theta(t' - t)\psi_+(x') = \int d^3x iS_F(x' - x)\gamma_0\psi_+(x). \tag{57}$$

$$-\theta(t - t')\psi_-(x') = \int d^3x iS_F(x' - x)\gamma_0\psi_-(x). \tag{58}$$

2.7. Série de Dyson

Para conseguir estudar espalhamentos em teoria de campos, devemos ter o aparato matemático correto para tal, partindo de um operador evolução temporal $U_I(t)$ arbitrário iremos realizar a expansão em série Dyson [6], e a partir deles encontrar as regras de Feynman

2.7.1. Operador de evolução temporal

Devemos construir um operador $U_I(t, t')$ que satisfaz a relação

$$\hat{U}_I(t) |\alpha, t'\rangle = |\alpha, t\rangle. \tag{59}$$

Se derivarmos em relação ao tempo temos:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t') \right\} |\alpha, t'\rangle = \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle. \tag{60}$$

Utilizando a equação de Schrödinger considerando o sistema de unidades $\hbar = c = 1$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t') \right\} |\alpha, t'\rangle = -iH_I |\alpha, t\rangle, \tag{61}$$

onde H_I é uma dada interação qualquer. Consideremos a seguinte condição de contorno

$$U_I(t_0, t_0) = \mathbb{I}, \tag{62}$$

onde \mathbb{I} é o operador identidade. Desta forma podemos reescrever a equação (61) na forma de uma equação integral

$$U_I(t, t') = \mathbb{I} - i \int dt H_I(t) U_I(t, t'). \tag{63}$$

Supondo H_I uma interação pequena e positiva, podemos então buscar uma expansão em série por meio de teoria de perturbação [14]. Neste caso $U_I(t, t_0)$ é representado pela série

$$U_I(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t, t'). \tag{64}$$

Com o termo inicial dado por

$$U_I^{(0)}(t, t') = \mathbb{I}. \tag{65}$$

E o termo geral dado por:

$$U_I^{(n)} = i \int dt'' H_I(t'') U_I^{(n-1)}(t'', t'); \quad n \geq 1. \tag{66}$$

De forma explícita

$$U_I^{(1)} = -i \int dt_1 H_I(t_1) \underbrace{U_I^{(0)}(t_1, t_0)}_{\mathbb{I}}. \tag{67}$$

$$U_I^{(2)} = (-i)^2 \int_{t'}^{t_1} dt_1 \int dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2). \tag{68}$$

$$U_I^{(n)} = (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n). \tag{69}$$

A solução iterativa é conhecida como expansão de Liouville-Neumann [15].

2.7.2. Ordenação temporal dos produtos de operadores

Dados dois operadores dependentes do tempo $\hat{A}(t_1)$ e $\hat{A}(t_2)$ [16] define o produto ordenado temporalmente como:

$$T\{\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\} = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & t_1 > t_2 \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), & t_2 > t_1 \end{cases}. \tag{70}$$

Ou, de forma equivalente

$$T\{\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\} = \theta(t_1 - t_2)\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) + \theta(t_2 - t_1)\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1), \tag{71}$$

onde θ é a função degrau de Heaviside.

Integrando o produto temporalmente ordenado em relação a t_1 e t_2

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{\hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2)\} = \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 [\theta(t_1 - t_2) \times \hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2)] + \theta(t_2 - t_1)\hat{A}(t_2)\hat{A}(t_1). \tag{72}$$

Usando as propriedades da função de Heaviside

$$= \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2) + \int_{t'}^{t_1} dt_2 \int_{t'}^t dt_1 \hat{A}(t_2)\hat{A}(t_1). \tag{73}$$

Realizando uma troca de índices, temos:

$$= \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2). \tag{74}$$

Ou seja

$$\int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2) = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t'}^t dt_2 T\{\hat{A}(t_1)\hat{A}(t_2)\}. \tag{75}$$

Podemos generalizar este resultado para n iterações, o que nos dá

$$\int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \hat{A}(t_1) \dots \hat{A}(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^t dt_n T\{\hat{A}(t_1) \dots \hat{A}(t_n)\}. \tag{76}$$

Se introduzirmos em (76) os elementos $U_I^n(t, t')$, teremos, para o N-ésimo termo da série

$$U_I^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} = \frac{1}{n!} T \left\{ \left[\frac{-i}{\hbar} \int_{t'}^t dt' H^{(int)}(t_1) \right]^n \right\}. \tag{77}$$

Assim o operador

$$U_I(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} U_I^{(n)}(t, t'). \tag{78}$$

Se comporta como uma exponencial

$$U(t, t') = T \exp \left\{ -i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right\}. \tag{79}$$

Vamos agora estudar a forma de cada ordem de perturbação e definir a matriz-S e a matriz-T.

2.8. Matriz-S

Considere o termo geral (69). Fazendo n=1 e os limites superiores e inferiores tenderem ao infinito, ou seja, $t \rightarrow \infty$ e $t_0 \rightarrow -\infty$ temos a correção de primeira ordem para o operador de espalhamento S

$$S_1 = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I(t_1). \tag{80}$$

Tomando o elemento de matriz de (80), obtemos

$$S_{if}^{(1)} = \langle \phi_f | S_1 | \phi_i \rangle. \tag{81}$$

Portanto,

$$S_{if}^{(1)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle \phi_f | H_I(t_1) | \phi_i \rangle. \tag{82}$$

Vamos agora considerar a condição de contorno em que o estado $|\psi_E(t)\rangle_s$ tende a uma onda plana em $t \rightarrow \infty$, ou seja, $|\psi_E(t)\rangle_s \rightarrow e^{-iEt} |\varphi_E\rangle$ onde $|\varphi_E\rangle$ é o estado de onda plana. Considerando uma dada interação devemos também ter uma dependência e^{iH_0t} adicional, resultando em

$$|\psi_E(t)\rangle_I \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} e^{-iEt} e^{iH_0t} |\varphi_E\rangle = |\varphi_E\rangle. \quad (83)$$

Para garantir que esse limite seja alcançado pelos estados espalhados por uma interação dinâmica $V_I(t)$, atenuamos as exponenciais oscilando loucamente em $t = \pm\infty$ desligando adiabaticamente H_I de acordo com

$$H_I \rightarrow H_{I,\epsilon} = e^{iH_0t} V(t) e^{-\epsilon|t|} e^{-iH_0t}. \quad (84)$$

se ϵ for pequeno e positivo, $V_{I,\epsilon} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \pm\infty$ como requerido. Ou ainda,

$$H_I = e^{iE_f t} V e^{-iE_i t}. \quad (85)$$

Assim, o elemento de matriz pode ser escrito como

$$S_{if}^{(1)} = -i \langle \phi_f | V | \phi_i \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{i(E_f - E_i)t_1}. \quad (86)$$

A integral é justamente a função delta de Dirac, portanto

$$S_{if}^{(1)} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle \phi_f | V | \phi_i \rangle. \quad (87)$$

A interpretação física desta correção é simples. Consideremos um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 respectivamente. Consideremos agora o sistema no referencial do centro de massa. Neste caso, teríamos uma partícula de massa reduzida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ se propagando livremente no estado ϕ_i para ser espalhada por um dado potencial V e terminar em um estado ϕ_f . Por ser simples, esta correção não nos dá informações de estados intermediários, para isso, vamos utilizar a segunda correção na matriz S . Partindo novamente de (69), desta vez $n=2$, temos o elemento de matriz

$$S_{if}^2 = -(-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \langle \phi_f | H_I(t_1) H_I(t_2) | \phi_i \rangle. \quad (88)$$

Lembrando da relação de completude [3]

$$\sum_m |\phi_m\rangle \langle \phi_m| = \mathbb{I}. \quad (89)$$

Temos

$$S_{if}^2 = (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \langle \phi_f | H_I(t_1) \sum_m |\phi_m\rangle \langle \phi_m| H_I(t_2) | \phi_i \rangle. \quad (90)$$

Ou ainda

$$S_{if}^2 = (-i)^2 \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} \langle \phi_f | H_I(t_1) | \phi_m \rangle \langle \phi_m | H_I(t_2) | \phi_i \rangle. \quad (91)$$

Reescrevendo o operador de interação de forma análoga à realizada para a primeira ordem de perturbação nos dá

$$S_{if}^2 = (-i)^2 \sum_m \langle \phi_f | V | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V | \phi_i \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{i(E_f - E_m)t_1} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{i(E_m - E_i)t_2}. \quad (92)$$

Enquanto a integral em t_1 não nos representa problema, a integral em t_2 diverge. Para evitar isto, vamos novamente invocar a prescrição $i\epsilon$. Desta forma a segunda integral deixa de ser um problema e a perturbação de segunda ordem para a matriz S é dada por

$$S_{if}^{(2)} = -2\pi i \delta(E_i - E_f) \sum_m \frac{\langle \phi_f | V | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V | \phi_i \rangle}{E_i - E_m + i\epsilon}. \quad (93)$$

Considerando novamente uma partícula reduzida de massa μ , podemos interpretar este resultado da seguinte forma:

A partícula se propaga livremente no estado ϕ_i e logo após é espalhada pelo potencial H em um ponto r do espaço, então ela se propaga livremente no estado intermediário ϕ_m até ser espalhada novamente pelo potencial V em um ponto r' e por fim se propaga livremente no estado ϕ_f .

Devemos então estudar a soma sobre os estados intermediários e retirar mais informações. Considerando o hamiltoniano não perturbado H_0 , temos o seguinte problema de autovalor

$$H_0 |\phi_m\rangle = E_m |\phi_m\rangle. \quad (94)$$

Ou seja, podemos escrever E_m como o elemento de matriz de H_0

$$E_m = \langle \phi_m | H_0 | \phi_m \rangle. \quad (95)$$

Desta forma, podemos reescrever a soma sobre os estados intermediários como

$$\sum_m \frac{\langle \phi_f | V | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V | \phi_i \rangle}{E - \langle \phi_m | H_0 | \phi_m \rangle + i\epsilon}. \quad (96)$$

Podemos reorganizar esta soma na forma

$$\sum_m \langle \phi_f | V | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V | \phi_i \rangle. \quad (97)$$

Temos então novamente a aparição da função de Green da partícula livre $G_0^+(+)$, isso nos permite escrever, considerando a relação de completudeza,

$$S_{if}^{(2)} = -2\pi i \delta(E_i - E_f) \langle \phi_f | V G_0^+(E) V | \phi_i \rangle. \quad (98)$$

Repetindo um procedimento similar para ordens mais alta de perturbação nos leva à expansão

$$S_{if} = \delta(E_i - E_f) \left\{ \delta_{if} - 2\pi i \left[\langle \phi_f | V | \phi_i \rangle + \sum_m \frac{\langle \phi_f | V | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V | \phi_i \rangle}{E_i - E_m + i\epsilon} + \sum_m \sum_n \frac{\langle \phi_f | V | \phi_m \rangle \langle \phi_m | V | \phi_n \rangle \langle \phi_n | V | \phi_i \rangle}{(E_i - E_m + i\epsilon)(E_i - E_n + i\epsilon)} \right] \right\}. \quad (99)$$

Utilizando a função de Green G_0^+ , podemos reescrever esta expansão na forma

$$S_{if} = \delta(E_i - E_f) \{ \delta_{if} - 2\pi i [\langle \phi_f | V | \phi_i \rangle + \langle \phi_f | V G_0^+(E) V | \phi_i \rangle + \langle \phi_f | V G_0^+(E) V G_0^+(E) V | \phi_i \rangle + \dots] \}. \quad (100)$$

Se observarmos que a série infinita de S_{if} representa a expansão de um operador binomial, podemos escrever

$$S_{if} = \delta(E_i - E_f) \left\{ \delta_{if} = 2\pi i \langle \phi_f | \sum_{n=0}^{\infty} [V G_0^+(E)]^n V | \phi_i \rangle \right\}. \quad (101)$$

Ou seja

$$S_{if} = \delta(E_i - E_f) \delta_{if} \langle \phi_f | [1 - V G_0^+(E)]^{-1} | \phi_i \rangle. \quad (102)$$

Escrevendo o termo $[1 - V G_0^+(E)]$ como $T^+(E)$, e realizando a propagação do estado ϕ_f para ϕ_i , ou seja, $T_{if}^+ = \langle \phi_f | T^+ | \phi_i \rangle$, temos a forma compacta da matriz-S

$$S_{if} = \delta(E_i - E_f) [\delta_{if} - 2\pi i T_{if}^+(E)]. \quad (103)$$

2.8.1. Taxa de probabilidade de transição

Como o elemento de matriz S_{if} realiza a transição de um estado inicial para outro final, a probabilidade dessa transição ser realizada, segundo os fundamentos da mecânica quântica [3], é dado pelo quadrado absoluto $|S_{if}|^2$. Consequentemente, para obter a taxa de probabilidade de transição, dividiremos a probabilidade pelo tempo total T da interação.

$$\omega_{fi} = \frac{d}{dt} |\langle \psi_f(t) | \psi_i(t) \rangle|^2 \rightarrow \frac{|S_{if}|^2}{T}. \quad (104)$$

Iremos utilizar o limite de ondas planas para calcular ω_{fi} . Neste caso, temos:

$$|S_{fi}|^2 = |\delta(E_{fi})|^2 |T_{fi}|^2, \quad (105)$$

onde, formalmente, $|\delta(E)|^2 = \delta(0)\delta(E)$ e

$$\delta(E) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-iEt}. \quad (106)$$

$$\xrightarrow{E \rightarrow 0} \delta(0) = \int_{T/2}^{T/2} dt = T. \quad (107)$$

Ou seja

$$\omega_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{T} = \delta(E_{fi}) \frac{\delta(0)}{T} |T_{fi}|^2 = \delta(E_{fi}) |T_{fi}|^2. \quad (108)$$

Densidade de estados Uma transição quântica sempre envolve ir de um estado preparado i para um range de estados finais f. O número de estados finais em um dado range de momento e energia é conhecido da mecânica quântica estatística como tendo uma incerteza do espaço de fases 6-dimensional da ordem de h^3 , portanto, para um espaço de fases unidimensional com $\vec{p}_f = \vec{p}'$

$$dN_f = \frac{V d^3 p'}{h^3} = V \frac{d^3 p'}{h^3} \rightarrow V d^3 p'. \quad (109)$$

nas unidades de $\hbar = c = 1$. Aqui V é a parte de coordenada tridimensional do espaço de fase.

Dado um fator de número de estados finais tal como (109), a taxa de transmissão em um conjunto de estados finais é

$$d\Gamma_{fi} = \omega_{fi} dN_f = \frac{|S_{fi}|^2}{T} dN_f = \delta(E_{fi}) |T_{fi}|^2 dN_f. \quad (110)$$

Para processos de um corpo no espaço de fase que conservam energia, com $E_i = E_f$ e $dN_f = (dN_f/dE_f) dE_f$, temos uma taxa de probabilidade de transição integrada de

$$\Gamma_{fi} = \int |T_{fi}|^2 \frac{dN_f}{dE_f} dE_f. \quad (111)$$

$$= 2\pi \rho(E_f) |T_{fi}|^2, \quad (112)$$

onde $\rho(E_f)$ é chamado o fator densidade de estados

2.8.2. Relação com a seção de choque

Definimos no Capítulo 2 a seção de choque,

$$\sigma d\Omega = \frac{N \cdot d\Omega}{I \cdot t}. \quad (113)$$

Podemos ainda reescrevê-la na forma

$$\sigma = \frac{\text{Taxa de espalhamento}}{\text{fluxo incidente}}. \quad (114)$$

O fluxo é o número de partículas que passa por uma dada área A em um período T de tempo, ou seja

$$F_i = \frac{N_i}{At}. \quad (115)$$

Vamos agora considerar o caso de uma partícula livre de momento \vec{p} sendo espalhada elasticamente por uma

partícula livre de momento \vec{p}' . Como estão livres, temos que, ψ_f^* , $\psi_i \propto 1/\sqrt{V}$ e $|T_{fi}|^2 \propto 1/V^2$, portanto

$$d\sigma = \frac{d\Gamma_{fi}}{F_i} = \left| \frac{m}{2\pi} T_{fi} \right|^2 d\Omega = |f(p, \theta)|^2 d\Omega. \quad (116)$$

Desta forma, podemos obter a seção de choque a partir da amplitude de espalhamento. Com isso vamos focar agora no caso relativístico e desenvolver as regras de Feynman necessárias.

3. Espalhamento Quântico Relativístico

3.1. Fluxo covariante

O fator de fluxo, das seções anteriores, é dado por:

$$F = \frac{N}{At} = \frac{Nv}{V}. \quad (117)$$

Como os fatores $2E$ e 2ω aparecem nos cálculos relativísticos, é interessante definir o fluxo relativístico de forma que eles apareçam. Dito isso, definimos como o fluxo relativístico não invariante sob transformações de Lorentz

$$\mathcal{F} = 2E2\omega v_r = |4E\vec{q} - \omega\vec{p}'|. \quad (118)$$

sendo E e ω as energias das partículas envolvidas e \vec{p}' e \vec{q} os seus momentos, v_r a diferença de velocidades relativas absolutas

$$v_r = \left| \left(\frac{\vec{q}}{\omega} \right) - \left(\frac{\vec{p}'}{E} \right) \right|. \quad (119)$$

Como as velocidades envolvidas não são invariantes, também é conveniente definir o fluxo total de momento, dado por

$$\mathcal{F}_q^k = 4(qW - \omega\hat{q} \cdot \vec{k}), \quad (120)$$

onde $\vec{k} = \vec{p}' + \vec{q}$. Podemos usar este \mathcal{F} e \mathcal{F}_q^k para definir o fluxo de Møller [6]

$$\mathcal{F}^M = 4[(\vec{p}' \cdot \vec{q}) - m^2\mu^2]. \quad (121)$$

Para frames de referência colineares, todos os três são invariantes.

3.2. Espaço de fase covariante

Devemos definir um fator de densidade de estados que seja invariante à transformação de Lorentz.

$$dN_f = \prod \frac{d^3p_{nf}}{2E_{nf}}. \quad (122)$$

Lembrando que $\frac{d^3p}{2E} = \delta_+(\vec{p}^2 - m^2)d^4p$, onde $\delta_+(\vec{p}^2 - m^2) = \theta(p_0)\delta(\vec{p}^2 - m^2)$, definimos o fator de n corpos

do espaço de fase covariante “entrando” em uma função delta que conserva a energia e momento.

$$dp_{nf}^{cov} = \delta^4(k - \sum_f p_f) dN_f^{cov}. \quad (123)$$

$$= \delta_+(\vec{p}^2 - m^2) \prod_{f=1}^n \frac{d^3p_{nf-1}}{2E_{nf-1}}. \quad (124)$$

3.3. Matriz-S covariante

O elemento de matriz covariante deve ter a estrutura simples para os processos de conservação de energia-momento

$$S_{fi}^{cov} = \delta_{fi}^{cov} + i(2\pi)^4 \delta(P_{fi}) T_{fi}^{cov}. \quad (125)$$

Para converter (125) em uma taxa de transmissão covariante, $\Gamma_{fi}^{(cov)}$, iremos utilizar a identidade formal

$$[\delta^4(P_{fi})]^2 = VT\delta^4(P_{fi}). \quad (126)$$

Para escrever a taxa de probabilidade de transmissão na forma covariante

$$d\Gamma_{fi}^{cov} = \frac{|S_{fi}^{cov}|^2}{T} dN_f^{cov}, \quad (127)$$

onde N_f é a densidade de estados finais. Extraíndo os elementos de volume da densidade de estados e de T_{fi}^{cov} temos:

$$d\Gamma_{fi}^{cov} = V^{1-n_i} |T_{fi}^{cov}|^2 d\rho_{nf}^{cov}, \quad (128)$$

onde n_i é a quantidade de estados iniciais. Considerando o espalhamento de dois corpos, podemos definir a seção de choque diferencial como

$$d\sigma_{fi} = \frac{d\Gamma}{\mathcal{F}_i} = \frac{1}{\mathcal{F}_i} |T_{fi}^{cov}|^2 dp_2^{cov}, \quad (129)$$

onde \mathcal{F}_i é o fator de fluxo inicial. Podemos ainda escrever a seção de choque diferencial geral como:

$$\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_q} = \frac{(q'/2\pi)^2}{\mathcal{F}_i \mathcal{F}_q^k} |T_{fi}^{cov}|^2. \quad (130)$$

No referencial de centro de massa, $\mathcal{F}_i \rightarrow 4q_{cm}E$ e $\mathcal{F}_q^k \rightarrow 4q'_{cm}W$ temos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{q'_{CM}}{q_{CM}} \left| \frac{T_{if}^{cov}}{8\pi W} \right|^2. \quad (131)$$

logo, a amplitude de espalhamento é dada por:

$$f = \frac{T_{fi}^{cov}}{8\pi W}. \quad (132)$$

3.4. Regras de Feynman

Na Seção 3 vimos que para o caso não relativístico, as funções de Green de partícula livre atuam como os propagadores das mesmas. Considerando as equações de Dirac, Klein-Gordon e Schrödinger, temos os propagadores

$$iG_0^\phi(q^2) = i\Delta_F(q^2) = i(q^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1}. \tag{133}$$

$$iG_0^\phi(p) = iS_F(p) = i(\not{p} - m + i\epsilon)^{-1} = i\frac{(\not{p} + m)}{(\vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{134}$$

Vamos voltar ao operador

$$S_I = T \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) \right\}. \tag{135}$$

Consideremos a interação entre duas partículas de spin 1/2 quaisquer produzindo um fóton. No referencial das partículas o campo eletromagnético A gera um potencial efetivo, determinado por

$$(\not{p} - m)\psi = V_\psi\psi, \quad V_\psi = e\gamma \cdot A. \tag{136}$$

Enquanto o fóton enxerga uma corrente de Dirac

$$-\vec{k}^2 A_\mu = j_\mu^{em} = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \tag{137}$$

Consideremos agora propagação não relativística à direita de uma partícula de momento \vec{p}_n e energia $E_n = E_p + \omega_q$, que tem como propagador $i(E - E_n + i\epsilon)^{-1}$ e a propagação à direita de uma antipartícula de momento $-p_n$ e energia E_n , desta forma, temos como propagador $i(E + E_n + i\epsilon)^{-1}$

Levando em conta a conservação de energia e momento, podemos escrever

$$\frac{i}{E - E_n + i\epsilon} + \frac{i}{E + E_n + i\epsilon} = \frac{2E_i}{E^2 - E_n^2 + i\epsilon}. \tag{138}$$

Ou seja

$$= \frac{2E_i}{(E^2 - \vec{p}_n^2) - (E_n^2 - \vec{p}_n^2) + i\epsilon}. \tag{139}$$

Se fizermos a mudança $E_n^2 - \vec{p}_n^2 = m^2$ e definirmos $p_n^2 = E^2 - \vec{p}_n^2$ temos

$$= 2E \frac{i}{p_n^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{140}$$

Para partículas de spin 1/2 o propagador é dado pela função de Green da equação de Dirac, descrita pela Equação (134).

Se considerarmos partículas de spin 1 massivas, escrevemos

$$i \frac{\sum_\lambda \xi_\mu^{(\lambda)}(\vec{p}_n) \xi_\nu^{(\lambda)*}(\vec{p}_n)}{E - E_n + i\epsilon} + i \frac{\sum_\lambda \xi_\mu^{(\lambda)*}(-\vec{p}_n) \xi_\nu^{(\lambda)}(-\vec{p}_n)}{E + E_n + i\epsilon}. \tag{141}$$

Para que a condição $p \cdot \xi(\vec{p}) = 0$ seja válida na região em que $(\vec{p}_n^2 = m^2)$ devemos ter

$$\sum_\lambda \xi_\mu^{(\lambda)}(\vec{p}_n) \xi_\nu^{(\lambda)*} = -(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m^2). \tag{142}$$

devemos ainda adicionar um quarto estado de spin para que a condição continue válida nos pontos onde $(\vec{p}_n^2 \neq m^2)$ que satisfaz

$$\xi_\mu^{(4)}(\vec{p}_n) \xi_\nu^{(4)*} = \frac{p_n - m^2}{p_n m^2} p_\mu^n p_\nu^n. \tag{143}$$

Para o fóton, a equação (141) fica

$$\frac{i \sum_\lambda \xi_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}_n) \xi_\nu^{(\lambda)*}(\vec{k}_n)}{\omega - \omega_n + i\epsilon} + \frac{i \sum_\lambda \xi_\mu^{(\lambda)*}(-\vec{k}_n) \xi_\nu^{(\lambda)}(-\vec{k}_n)}{\omega - \omega_n + i\epsilon} = 2\omega \frac{-ig_{\mu\nu}}{k_n^2 + i\epsilon}. \tag{144}$$

Vamos agora obter a forma do operador S, considerando um espalhamento de uma partícula carregada (1), por outra partícula (2) através de um potencial Coulombiano com um elemento de matriz de ordem mais baixa $S_{fi}^{cov} = -ie j_0^{(1)} A_0^{(2)}$, onde $A_0^{(2)}$ é tomado como se fosse um potencial externo.

Podemos pensar em $A_0^{(2)}$ como sendo gerada pela densidade de carga $e j_0^{(2)}$ de acordo com a lei de Gauss [17] $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = e j_0^{(2)}$ ou $\vec{k}^2 A_0^{(2)} = e j_0^{(2)}$. Resolvendo para $A_0^{(2)}$ em S_{fi} vemos que $S_{fi}^{cov} = -ie^2 j_0^{(1)} \vec{k}^{-2} j_0^{(2)}$

Que tem a estrutura de um propagador estático correspondendo ao hamiltoniano de Coulomb

$$H_{coul} = \frac{e^2}{8\pi} \int d^3r d^3r' \frac{j_0^{(1)}(\vec{r}', t) j_0^{(2)}(\vec{r}, t)}{|\vec{r}' - \vec{r}|}. \tag{145}$$

Desta forma, temos, utilizando a transformada de Fourier

$$(V)_{stat} = e^2 j_0^{(1)}(\vec{k}) \frac{1}{|\vec{k}|^2} j_0^{(2)}(\vec{k}) = e^2 \frac{j_0^{(2)} \frac{k_0^2 - |\vec{k}|^2}{|\vec{k}|^2} j_0^{(1)}(\vec{k})}{\vec{k}^2 + i\epsilon}. \tag{146}$$

$$e^2 \frac{j_i^{(1)} \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} j_j^{(2)}(\vec{k}) - j_0^{(1)}(\vec{k}) j_0^{(2)}(\vec{k})}{\vec{k}^2 + i\epsilon}. \tag{147}$$

Por causa da conservação de corrente eletromagnética $k \cdot j = 0$ ou $k_0 j_0 = k_i j_i$. Observe que os dois termos no numerador de (146) respectivamente correspondem aos termos longitudinal e de spin-0 na soma de spins

Por outro lado, a interação eletromagnética transversa dinâmica $H_{dyn} = -e\vec{j} \cdot \vec{A}_1$ leva à interação de segunda ordem

$$(VG_0^+V)_{dyn} = \frac{e^2 j_i^{(1)}(\vec{k}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \right) j_j^{(2)}(\vec{k})}{\vec{k}^2 + i\epsilon}. \tag{148}$$

Somando (146) e (148), temos

$$(VG_0^+V)_{dyn} + (V)_{stat} = e j_\mu^{(1)}(\vec{k}) \left(\frac{-g^{\mu\nu}}{\vec{k}^2 + i\epsilon} \right) e j_\nu^{(2)}(\vec{k}). \tag{149}$$

Portanto vemos que o termo entre parênteses é correspondente ao propagador do fóton. Considerando que j_μ é uma corrente de Dirac, temos que $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. Portanto temos, considerando as partículas incidentes um elétron e um pósitron as regras

$$u^{(\lambda)}(\vec{p}) \equiv x \longrightarrow y. \tag{150}$$

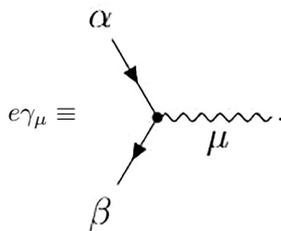
e o equivalente para uma antipartícula de mesmo spin

$$\bar{v}^{(\lambda)}(\vec{p}) \equiv y \longleftarrow x. \tag{151}$$

As setas estão sempre na direção da corrente de carga. Para a propagação interna de partículas temos para o fóton, partícula de interesse para o problema, o diagrama

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{\vec{k}^2 + i\epsilon} \equiv \text{wavy line } \mu. \tag{152}$$

Temos então que o termo referente ao vértice desejado é dado por



$$e\gamma_\mu \equiv \text{vertex } \mu. \tag{153}$$

Por fim, para partículas de spin 1/2 já espalhadas, temos

$$\bar{u}^{(\lambda)}(\vec{p}) \equiv x \longrightarrow y. \tag{154}$$

E para a antipartícula

$$v^{(\lambda)}(\vec{p}) \equiv y \longleftarrow x. \tag{155}$$

3.5. Aplicação para o espalhamento $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$

Vamos então utilizar os conceitos estudados anteriormente, tal como a relação da matriz-S com a seção de choque, aplicando as regras de Feynman para descobrir os elementos da matriz-S.

Existem múltiplos diagramas possíveis na segunda ordem de interação, porém vamos focar nesta seção o que possui apenas um fóton virtual e gera um par múon antimúon, que está representado na Figura 3

Considerando o diagrama da Figura 3, obtemos, utilizando as regras de Feynman para montar o elemento de matriz S_{if} :

$$S_{if} = \bar{v}^{s'}(p')(-ie\gamma^\mu)u^s(p) \times \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{\vec{k}^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}^r(q)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(q'). \tag{156}$$

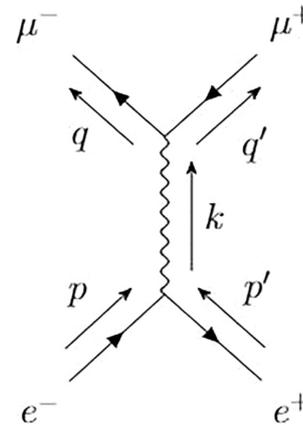


Figura 3: Diagrama de Feynman de Segunda ordem de Perturbação para o espalhamento Elétron-Pósitron [18].

Podemos simplificar essa equação se fizermos um pequeno rearranjo e subentendermos os índices de spin, de forma que;

$$S_{if} = \frac{ie^2}{\vec{k}^2 + i\epsilon} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(q)\gamma_\mu v(q')). \tag{157}$$

Segundo o que foi mostrado anteriormente, obtemos a seção de choque ao tomar o módulo quadrado do elemento de matriz da matriz-S. A partir daí obtemos:

$$|S_{if}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')) \times (\bar{u}(k)\gamma_\mu \bar{v}(k)v(k')\gamma_\nu u(k)). \tag{158}$$

A equação (158) pode ser simplificada se nos livrarmos da informação de spin, para tal, computamos

$$\frac{1}{4} \sum_s \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |S_{if}(s, s' \rightarrow r, r')|^2. \tag{159}$$

Utilizando as relações de completeza podemos escrever:

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |S_{if}|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \text{Tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)] \times \text{Tr}[(\not{q}' - m_\mu)\gamma_\mu(\not{q} + m_\mu)]. \tag{160}$$

Usando teoremas do traço [6], podemos simplificar o primeiro colchete de forma que

$$\text{Tr}[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)] = [p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - 4g^{\mu\nu}(p \cdot p' + m_e^2)]. \tag{161}$$

Da mesma forma podemos escrever

$$\text{Tr}[(\not{q}' - m_\mu)\gamma_\mu(\not{q} + m_\mu)] = [q'_\mu q_\nu + q'_\nu q_\mu - 4g_{\mu\nu}(q \cdot q' + m_\mu^2)]. \tag{162}$$

Multiplicando estes termos, temos uma expressão para a seção de choque diferencial que depende apenas dos

momentos das partículas incidentes e emergentes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{spins} |S_{if}|^2 \\ &= \frac{8e^4}{k^4} [(p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) + m_\mu(p \cdot p')]. \end{aligned} \tag{163}$$

Utilizando as relações entre os momentos e a energia envolvida

$$\begin{aligned} \vec{k}^2 &= (p + p')^2 = 4E^2. \\ p \cdot p' &= 2E^2. \\ p \cdot q &= p' \cdot q' = E^2 - E\sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta. \\ p' \cdot q &= p \cdot q' = E^2 + E\sqrt{E^2 - m_\mu^2} \cos \theta. \end{aligned}$$

Substituindo esses termos e rearranjando, temos

$$\frac{1}{4} \sum_{spins} |S_{if}|^2 = e^4 \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]. \tag{164}$$

então, a seção de choque diferencial pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4E_{CM}} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \\ &\times \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right]. \end{aligned} \tag{165}$$

ou seja, a seção de choque total é dada por

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2}\right). \tag{166}$$

3.6. Espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$

Além do resultado estudado anteriormente, o espalhamento e^-e^+ também pode resultar em fótons. Para que as leis de conservação sejam respeitadas, é necessário que o processo resulte em dois fótons com momento oposto. Antes de calcular a seção de choque da aniquilação, vamos calcular a seção de choque de um espalhamento Compton. Faremos isso pois ambos os processos possuem diagramas de Feynman praticamente idênticos

3.6.1. Espalhamento Compton por um elétron

Diferente do $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, o espalhamento Compton de segunda ordem possui dois possíveis diagramas de Feynman, como pode ser visto na Figura 4. Neste caso a matriz-T covariante deve ser escrita como a soma das matrizes-T de cada diagrama.

Desta forma, seguindo as regras de Feynman [18] e considerando $p + k = p' + k' = K$, $p' - k = p - k' = \bar{K}$

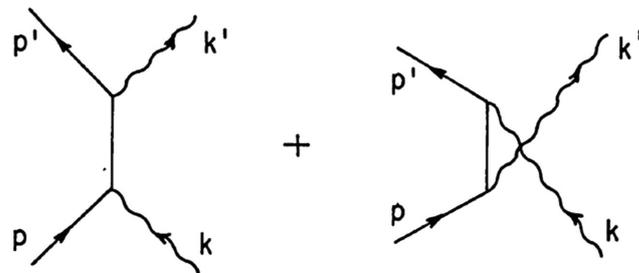


Figura 4: Diagramas de Feynman para o espalhamento Compton. Fonte: [19].

temos a matriz-S covariante do processo

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-i)^2 \xi_\mu^*(\vec{k}') \bar{u}_p e \gamma^\mu \left[\frac{i(\bar{K} + m)}{K^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\ &\times e \gamma^\nu u_p \xi_\nu(\vec{k}) \delta^4(P_{fi}) + (-i)^2 \xi_\nu(\vec{k}) \bar{u}_p e \gamma^\nu \\ &\times \left[\frac{i(\bar{K} + m)}{K^2 - m^2 + i\epsilon} \right] e \gamma^\mu u_p \xi_\mu^*(\vec{k}') \delta^4(P_{fi}). \end{aligned} \tag{167}$$

Podemos relacionar a matriz-s com a função M de Compton através de $T_{fi}^{cov} = \xi^{*\mu}(\vec{k}') M_{\mu\nu} \xi^\nu(\vec{k})$. Utilizando as variáveis de Mandelstam [6] escrevemos:

$$M_{\mu\nu} = -e^2 \left\{ \frac{\gamma_\mu(\bar{K} + m)\gamma_\nu}{s_m} + \frac{\gamma_\nu(\bar{K} + m)\gamma_\mu}{u_m} \right\}. \tag{168}$$

Vamos computar a seção de choque não polarizada somando e tomando a média sobre os spins do elétron inicial

$$|T_{fi}^{cov}|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{p} + m) \xi'^{* \cdot M \cdot \xi} (\not{p} + m) \xi' \cdot \bar{M} \cdot \xi^* \right]. \tag{169}$$

Especializando no gauge transversal $\xi_0 = 0$, de tal forma que $\xi \cdot p = \xi'^* \cdot p = 0$ no referencial do laboratório, e usando as propriedades do traço temos:

$$|T^{cov_{fi}}|^2 \rightarrow 4e^2 \left(|\xi'^* \cdot \xi|^2 - \frac{t^2}{4s_m u_m} \right). \tag{170}$$

Logo, a seção de choque no referencial do laboratório é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{imp}}{d\Omega_L} &= \left(\frac{\omega'}{8\pi m\omega} \right)^2 |T_{fi}^{cov}|^2 \\ &= \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 r_0^2 \left[|\xi'^* \cdot xi|^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} \right) \right]. \end{aligned} \tag{171}$$

3.6.2. Aniquilação elétron-pósitron

Como dito anteriormente, os diagramas de Feynman para o processo $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ estão representados na

Figura 4, com p' representando um pósitron. Neste cenário, temos:

$$T_{fi}^{cov} = \xi_\mu^* \bar{v}_p \left(-e^2 \left\{ \frac{\gamma_\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\nu}{s_m} + \frac{\gamma_\nu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma_\mu}{u_m} \right\} \right) u_p \xi_\nu. \quad (172)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos a seção de choque para a aniquilação elétron-pósitron resultando em dois fótons.

$$\frac{d\sigma^{imp}}{\Omega_L} = \frac{\omega'^2 r_0^2}{8\bar{p}'(\bar{E} + m)} \left[\frac{\omega'}{\bar{\omega}} + \frac{\bar{\omega}}{\omega'} + 2 - 4(\xi'^* \cdot \xi^*)^2 \right]. \quad (173)$$

3.6.3. Higgs-Strahlung e fusão WW

Outra aplicação interessante da aniquilação elétron pósitron é aquela em que o resultado do processo envolve o bóson de Higgs. Este processo é de suma importância, pois é o principal mecanismo para gerar o Higgs em colisores tais como o LHC, ILC e CLIC.

Existem duas principais interações sobre as quais o Higgs pode gerado, sendo elas o Higgs-Strahlung, ou seja, $e^-e^+ \rightarrow ZH \rightarrow \nu\bar{\nu}H$, e a fusão WW, $e^-e^+ \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_eH$

Podemos, utilizando as regras de Feynman, escrever a seção de choque para ambos os processos.

Começando pelo Higgs-Strahlung, representado pela Figura 5, podemos escrever a seguinte seção de choque [20]:

$$\sigma_{HS} = \frac{G_f^2 m_Z^4}{96\pi s} (v_e + a_e^4) \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda + 12m_z^2/s}{(1 - m_z^2/s)}. \quad (174)$$

\sqrt{S} é a energia do centro de massa, a_e e v_e são as cargas Z do elétron e λ é a função no espaço de fase das partículas, sendo então

$$\lambda = \left(1 - \frac{(m_H + m_Z)^2}{s} \right) \left(1 - \frac{(m_H - m_Z)^2}{s} \right). \quad (175)$$

Se não levarmos a largura da distribuição de energia do bóson Z em consideração, temos que a seção de choque tem um crescimento abrupto em torno do valor

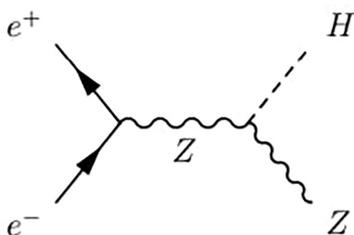


Figura 5: Diagramas de Feynman para o Higgs-strahlung. Fonte: [20].

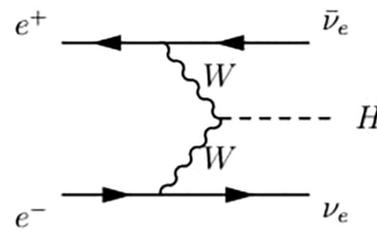


Figura 6: Diagramas de Feynman para a Fusão WW. Fonte: [20].

$(s - (m_H^2 - m_Z^2)^{1/2})$. Em torno de 25 GeV acima deste valor, a seção de choque apresenta um decaimento vertiginoso, logo, o Higgs-strahlung é o processo de produção dominante para valores moderados de Energia.

Para a fusão WW, representado pela Figura 6, podemos escrever a seguinte seção de choque[20]:

$$\sigma_{WWF} = \frac{G_F^2 m_W^4}{4\sqrt{2}\pi^2} \int_{x_H}^1 dx \int_x^1 \frac{dy F(x, y)}{[1(y-x)/x_W]^2}, \quad (176)$$

onde a função F(x,y) é dada por:

$$F(x, y) = \left(\frac{2x}{y^3} - \frac{1+3x}{y^2} + \frac{2+x}{y} - 1 \right) \times \left[\frac{z}{1+z} - \log(1+z) \right] + \frac{x z^2 (1-y)}{y^3 (1+z)}. \quad (177)$$

Com os valores:

$$x_H = \frac{m_H^2}{s}, x_W = m_W^2/s, z = \frac{y(x - x_H)}{(x - x_W)}$$

O processo de fusão se torna dominante apenas no âmbito de altas energias.

3.7. Busca por uma nova física

Sabe-se que o vácuo preenchido pelo condensado de Higgs é o responsável pela quebra de simetria eletrofraca. Porém o mecanismo que permite o campo de Higgs formar um condensado no vácuo não é explicado pelo modelo padrão, portanto, se faz necessário a busca por uma nova física, e para conseguirmos discriminar estes modelos é necessário medir com a maior precisão quantos tipos de acoplamentos for possível, e o quanto possível, independente de modelos.

Os desvios preditos pela maioria dos modelos de uma nova física são tipicamente inferiores a um pequeno percentual, logo as medições de acoplamento devem alcançar uma precisão de no mínimo 1%.

Esta sensibilidade só é disponível em colisores de Léptons.

3.7.1. ILC

O Colisor Linear Internacional, ou ILC, é um colisor projetado para cobrir um intervalo de energias do centro

de massa de 200 GeV a 500 GeV, expansível até 1 TeV. Um de seus principais aspectos é a medição dos acoplamentos do Higgs com precisão sem precedentes, visando encontrar desvios do modelo padrão e comparar seus padrões com as previsões de modelos de nova física [21].

Assim como no LHC, a maioria das medições do bóson de Higgs são realizadas sobre o produto entre seção de choque e fração de ramificação (*branching ratio*). O ILC porém também realiza a medição do tamanho absoluto da seção de choque de uma produção inclusiva do Higgs, através da aplicação da técnica do recuo (*recoil technique*) ao processo Higgs-Strahlung. Esta técnica envolve se medirem somente os momenta dos produtos do decaimento do bóson Z que recuam contrariamente ao bóson de Higgs, o que, em princípio, portanto, independe do modo de decaimento do Higgs. A medição dessa seção de choque σ_{ZH} é indispensável para se extrair, daquelas medições do produto de seções de choque pelas frações de ramificação, as próprias frações de ramificação, a largura total de energia do Higgs, e os acoplamentos. A técnica do recuo, que somente é possível em um colisor de léptons, devido ao estado inicial bem conhecido, é aplicável mesmo quando o bóson de Higgs decai de forma invisível, permitindo assim que se determine σ_{ZH} de uma forma completamente independente de modelos. A técnica do recuo prevê também uma das medições mais precisas da massa do bóson de Higgs (M_H), o que é necessário para se estimar o fator do espaço de fase para o decaimento HWW^* , e assim extrair a largura total da curva de massa/energia do Higgs [22].

3.7.2. CLIC

O **COMPACT LINEAR COLLIDER** (*CLIC*) é um experimento desenvolvido no CERN que, usando uma nova técnica de aceleração de dois feixes e^+e^- , vai operar em três estágios de energia de centro de massa, 380MeV, 1,5TeV e 3 TeV, possibilitando a obtenção de medições com alta precisão das massas do bóson de Higgs, do quark top, e da constante de acoplamento da interação nuclear forte [23]. Neste cenário, será possível, não só estudar em mais detalhe o mecanismo de quebra de simetria da interação eletrofraca (EWSB), como buscar eventos potenciais de uma nova física, vindo complementar em energias mais altas os resultados obtidos pelo ILC. Esta complementaridade se traduziu em 22 de março de 2013 na formação de uma colaboração abrangendo ambos os experimentos, a **Linear Collider Collaboration** (LCC).

4. Considerações Finais

Estudamos o espalhamento em três níveis diferentes. Começando por um conhecido espalhamento clássico, o experimento de Rutherford, foi definido o ângulo sólido

e, utilizando as ferramentas da mecânica clássica, foi obtida a seção de choque para este problema.

Com a seção de choque e ângulo sólido definidos, passamos para o regime quântico não relativístico. Com base em um operador de evolução temporal chegamos na série de Dyson. A partir dessa série, tendo em mente a função de Green da partícula livre e a equação de Lippmann-Schwinger foram mostrados os elementos da matriz-S e matriz-T. Além disso, a relação entre a seção de choque e a matriz-T foi mostrada.

A partir disso, já em um regime relativístico, chegamos à formas covariantes para a matriz-S, e então foram desenvolvidos propagadores covariantes usando como base múltiplos cenários de interação entre duas partículas. A partir disso, foram observadas as regras de Feynman, que foram usadas para encontrar a seção de choque do espalhamento elétron-pósitron resultando em um par múon-antimúon de ordem mais baixa.

Apesar de ter sido apresentados apenas alguns diagramas neste trabalho, sendo calculados através da matriz-S, existem múltiplos outros para o espalhamento elétron-pósitron. Além disso existe uma teoria mais moderna para lidar com esse tipo de problema, a QED (*Quantum Electrodynamics*). Contudo, este trabalho é, sem dúvidas, um bom começo para estudar interações mais complexas entre partículas, que podem trazer luz sobre a física além do modelo padrão e outros questionamentos.

Referências

- [1] A.F. Zarneck, arXiv:2004.14628v1 (2020).
- [2] W. Heisenberg, Zeitschrift für Physik **33**, 879 (1935).
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley-VCH, Weinheim, 1996), v. 1.
- [4] E. Schrödinger, Phys. Rev. **28**, 1049 (1926).
- [5] P.A.M. Dirac, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **35**, 416 (1939).
- [6] C. Itzykson e J. Zuber, *Quantum Field Theory* (Dover, New York, 2005).
- [7] E. Butkov, *Física Matemática* (LTC, Rio de Janeiro, 1978).
- [8] B.A. Lippmann e J. Schwinger, Phys. Rev. **79**, 469 (1950).
- [9] R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).
- [10] J. Frejlich, *Óptica* (Oficina de Textos, São Paulo, 2011).
- [11] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **117**, 610 (1928).
- [12] O. Klein, Zeitschrift für Physik **33**, 879 (1925).
- [13] W. Gordon, Zeitschrift für Physik **40**, 117 (1926).
- [14] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley-VCH, Weinheim, 1996), v. 2
- [15] D. Belkic, *Principles of Quantum Scattering Theory* (CRC Press, Boca Raton, 2003).
- [16] M.E. Peskin e D.V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory* (Westview Press, Nashville, 2007).
- [17] J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W. Christy, *Foundations of Electromagnetic theory* (Pearson, New York, 1993), 4 ed.

- [18] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton, 2003).
- [19] M.D. Scadron, *Advanced Quantum Theory and Its Applications Through Feynman Diagrams* (Springer, Heidelberg, 1979).
- [20] W. Kilian, M. Kramer e P.M. Zerwas, arXiv:hep-ph/9512355v1 (1995).
- [21] P. Bambade, T. Barklow, T. Behnke, M. Berggren, J. Brau, P. Burrows, D. Denisov, A. Faus-Golfe, B. Foster, K. Fujii et al., arXiv:1903.01629v3 (2019).
- [22] J. Yan, S. Watanuki, K. Fujii, A. Ishikawa, D. Jeans, J. Strube, J. Tian e H. Yamamoto, arXiv:1604.07524v3 (2021).
- [23] P.N. Burrows, N.C. Lasheras, L. Linssen, M. Petric, A. Robson, D. Schulte, E. Sicking, S. Stapnes e CERN (eds), *The Compact Linear Collider (CLIC) - 2018 Summary Report* (CERN, Geneva, 2018).