

# Analogia eletrônica no ensino de Física

(*Electronic analogy in Physics teaching*)

Ronilson Rocha<sup>1</sup>, Luiz S. Martins-Filho<sup>2</sup> e Romuel F. Machado<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Engenharia de Controle e Automação, Escola de Minas,  
Universidade Federal de Ouro Preto, MG, Brasil*

<sup>2</sup>*Departamento de Computação, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG, Brasil*

<sup>3</sup>*Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, MG, Brasil*

Recebido em 9/9/2004; Revisado em 4/3/2005; Aceito em 15/3/2005

Este artigo introduz um procedimento para o projeto de circuitos eletrônicos analógicos simples que emulam o comportamento dinâmico de sistemas físicos e matemáticos. Tais circuitos podem ser utilizados como uma aproximação experimental para desenvolvimento de atividades experimentais de ensino, sendo facilmente aplicáveis em qualquer laboratório. Como exemplo, as versões eletrônicas dos sistemas caóticos de Duffing e Rössler são projetadas e implementadas, resultando em protótipos simples, baratos, robustos, versáteis e funcionais.

**Palavras-chave:** sistemas dinâmicos, simulação analógica, laboratório de ensino.

This work introduces a procedure for analogue electronic circuits design that emulate the dynamic behavior of physical and mathematical systems. Such circuits can be applied as a practical approach for didactic experiments, and easily settled at any laboratory. As instance, electronic version of Duffing and Rössler chaotic systems are designed and implemented, resulting in simple, low cost, robust and functional prototypes.

**Keywords:** dynamic systems, analogic simulation, didactic laboratory.

## 1. Introdução

O ensino de Física envolve uma extensa teoria que pode implicar muitas vezes um alto grau de abstração e de complexidade conceitual. Neste contexto, é importante que o ensino da Física inclua o desenvolvimento de atividades experimentais, que desperte maior interesse e motivação dos estudantes e proporcione uma melhor compreensão do conteúdo teórico, o que favorece a assimilação de diversos conceitos importantes. Desta forma, o processo de aprendizagem deve ser uma combinação de conceitos teóricos e práticas experimentais [1]. Entretanto, o desenvolvimento e a implementação de experimentos didáticos podem ser relativamente complicados devido a uma série de limitações impostas ao professor, tais como inexistência de espaço adequado, falta de suporte financeiro, dificuldade de construção de sistemas reais, quantidade elevada de estudantes por aula e tempo limitado de duração das mesmas [2].

Diante das dificuldades de implantação de um laboratório apropriado para o ensino experimental, uma alternativa tradicionalmente adotada é a utilização de softwares para efetuar a simulação numérica de modelos

matemáticos de sistemas físicos, tais como o MATLAB e o MAPLE. Embora tal solução permita demonstrar diversos conceitos e idéias importantes da Física, ela é em certa medida paliativa por não introduzir maior realismo no processo de ensino, uma vez que não existe o contato direto com uma implementação prática e todos os seus aspectos não reproduzíveis computacionalmente, tais como ruídos e distúrbios aleatórios, problemas de medição, variação de parâmetros e falhas de operação.

Considerando que o comportamento no tempo de diversos sistemas físicos é governado por equações diferenciais, é possível emular a sua dinâmica utilizando um sistema de natureza diferente, mas com características dinâmicas similares. Mesmo um modelo simulado numericamente, a despeito de suas limitações, pode ser considerado como um análogo matemático para um sistema real. Esse princípio de analogia entre sistemas de naturezas diferentes pode ser de grande ajuda para o desenvolvimento de atividades experimentais de ensino. Tomando os sistemas eletro-eletrônicos como analogia a diversos sistemas físicos, é possível obter a implementação prática relativamente mais simples e barata que outras implementações. A partir dessa

<sup>1</sup>E-mail: rocha@em.ufop.br e <sup>2</sup>luizm@iceb.ufop.br.

analogia eletrônica, pode-se construir protótipos simples, baratos, robustos, versáteis e funcionais em um espaço mínimo, facilmente aplicáveis em qualquer laboratório como uma aproximação experimental de sistemas complicados e caros [3], [4].

Em um circuito eletro-eletrônico análogo, as variáveis do sistema original são representadas por sinais de tensão e corrente, os quais podem ser diretamente observados e armazenado em osciloscópios e/ou sistemas de aquisição, dispensando a necessidade de sensores caros. Mesmo não reproduzindo completamente a dinâmica do sistema original, os protótipos eletrônicos análogos consistem em uma solução mais realista que a simulação computacional para a realização de experimentos práticos, dado que incorpora vários aspectos experimentais que facilitam o estudo em termos práticos de diversos fenômenos importantes não observáveis em modelos matemáticos. Outra vantagem da analogia eletrônica é a facilidade de alterar os parâmetros do sistema análogo durante a sua operação, permitindo observar as variações de seu comportamento dinâmico simultaneamente.

Entretanto, a realização eletrônica direta de um sistema também apresenta algumas dificuldades intrínsecas, uma vez que determinados fatores devem ser considerados com o objetivo de assegurar a integridade física dos componentes e/ou instrumentos de medição utilizados na implementação, bem como a correta reprodução da dinâmica do sistema original. Estes fatores estão relacionados com as limitações de amplitude e frequência dos sinais elétricos impostas pelos elementos que constituem o circuito eletrônico análogo. Por exemplo, se um sinal excede o limite máximo de tensão, geralmente imposto pela fonte de alimentação, provavelmente um comportamento não linear indesejável será introduzido na reprodução do sistema real. Numa outra situação, a presença de ruídos indesejáveis pode afetar os sinais de baixa amplitude. Além desses aspectos, também é desejável obter uma versão eletrônica simples do sistema real utilizando o mínimo necessário de componentes, uma vez que circuitos complexos e intrincados são mais difíceis de construir, aumentando a possibilidade de incertezas e erros.

O sucesso de uma versão eletrônica análoga de qualquer sistema dinâmico depende de obter uma condição de operação onde os sinais elétricos envolvidos possam ser claramente visualizados a partir de um instrumento adequado de medição, tal como um osciloscópio, sempre respeitando as limitações de amplitude e frequência que são impostas pelos componentes do circuito e instrumentos utilizados [5]. Tal condição, conhecida como meia escala, é obtida dimensionando o circuito eletrônico de forma que a variação dos sinais elétricos ocorra dentro de uma faixa aceitável de amplitude, determinada pela sensibilidade do instrumento utilizado para se efetuar a medida e pelo limite máximo de

tensão, geralmente imposto pela tensão de alimentação do circuito, no qual se manifestam os efeitos de não-linearidades estranhas ao sistema original, tal como a saturação. Neste contexto, o circuito análogo deve ser projetado para operar em um ponto intermediário entre tais valores extremos de tensão, sendo muitas vezes necessário modificar o modelo original através da aplicação de fatores de escala para a amplitude e tempo, visando restringir as variações dos sinais elétricos presentes no circuito eletrônico.

Este artigo apresenta uma metodologia de projeto para obter uma simples implementação eletrônica que reproduza adequadamente o comportamento dinâmico de um sistema físico, o qual pode ser mecânico, elétrico, químico, térmico, hidráulico, econômico, biológico, etc. Como exemplo, são desenvolvidas nesse trabalho versões eletrônicas que reproduzem o comportamento dinâmico dos sistemas caóticos de Duffing e Rössler, os quais são importantes tanto no ponto de vista histórico quanto conceitual. Os protótipos desenvolvidos podem ser utilizados em vários experimentos práticos envolvendo controle, sincronização, identificação, etc.

## 2. Analogia eletrônica

A analogia eletrônica consiste na implementação de um circuito eletrônico que reproduza o comportamento dinâmico de um determinado sistema físico ou matemático, sendo que o amplificador operacional é o principal componente eletrônico utilizado nestas implementações.

Um amplificador operacional consiste de um amplificador de vários estágios e altíssimo ganho  $A_v$  com entrada diferencial, normalmente encontrado na forma de circuito integrado contendo uma, duas ou quatro unidades em um mesmo chip, embora possa ser construído utilizando componentes discretos como transistores, diodos e resistores. A Fig. 1A mostra o encapsulamento e a disposição dos pinos do CI TL074 da Texas Instruments, o qual incorpora quatro unidades amplificadoras operacionais idênticas. O esquema básico de polarização de um amplificador operacional é exibido na Fig. 1B, o qual deve utilizar uma alimentação dupla e simétrica. Graficamente, o amplificador operacional é simbolizado por um triângulo apontado no sentido do fluxo do sinal, estando os dois terminais diferenciais de entrada representados em uma das bases e o terminal de saída colocado no vértice oposto. A entrada não inversora é representada pelo sinal (+), enquanto que a entrada inversora é assinalada com o sinal (-). Em relação à linha de 0 V, a polaridade do sinal de saída será igual a do sinal resultante da diferença algébrica entre as duas entradas:

$$V_{out} = A_v (V_{in+} - V_{in-}). \quad (1)$$

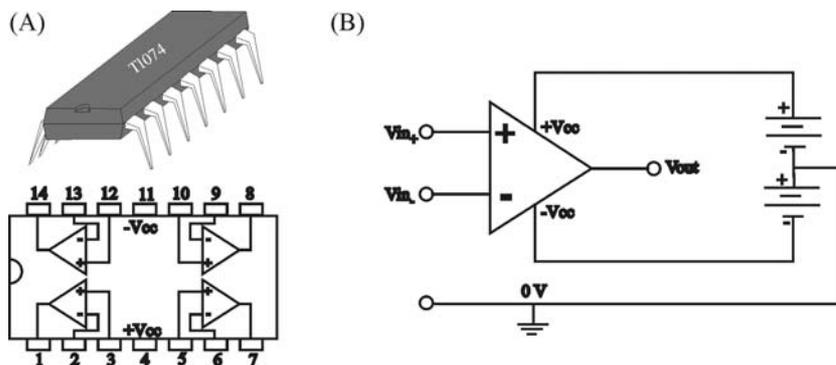


Figura 1 - O Amplificador operacional: A) Encapsulamento do TL074 e B) Diagrama básico de polarização.

As características de um amplificador operacional típico são um ganho elevadíssimo, uma impedância de entrada alta e uma impedância de saída baixa, as quais se aproximam bastante das características de um amplificador de tensão ideal. Tais características permitem, além do acoplamento direto entre circuitos sem o risco de interações indesejáveis, o controle da resposta do amplificador operacional a partir da introdução de redes externas de realimentação, permitindo o desenvolvimento de circuitos eletrônicos que executam uma grande variedade de operações matemáticas lineares e não lineares envolvendo sinais de tensão analógicos.

Os principais circuitos eletrônicos lineares com amplificadores operacionais são derivados da configuração genérica mostrada na Fig. 2. para determinar a relação entre a saída e as entradas do circuito, deve-se considerar que, devido ao elevadíssimo ganho do amplificador, existe um curto-circuito virtual entre as entradas do dispositivo ( $V_d \approx 0$ ). Por outro lado, não há circulação de corrente nas entradas do amplificador operacional devido às elevadíssimas impedâncias de entrada. Se  $V_{i+} = 0$ , a influência de  $V_{i-}$  sobre  $V_o$  será dada por:

$$I_{i-} = I_{f-} \Rightarrow \frac{V_{i-}}{Z_i} = -\frac{V_{o-}}{Z_f} \Rightarrow V_{o-} = -\frac{Z_f}{Z_i} V_{i-}. \quad (2)$$

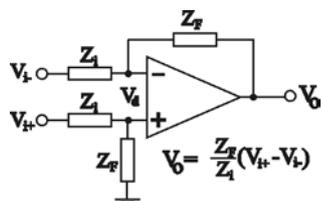


Figura 2 - Circuito genérico com amplificadores operacionais.

De modo similar, a influência de  $V_{i+}$  sobre  $V_o$  pode ser determinada fazendo  $V_{i-} = 0$ :

$$\frac{Z_f}{Z_i + Z_f} V_{i+} = \frac{Z_i}{Z_i + Z_f} V_{o+} \Rightarrow V_{o+} = \frac{Z_f}{Z_i} V_{i+}. \quad (3)$$

Como se trata de um circuito linear, o teorema da superposição assegura que a tensão de saída consiste na

soma dos efeitos individuais de cada entrada atuando isoladamente, ou seja:

$$V_o = V_{o-} + V_{o+} = \frac{Z_f}{Z_i} (V_{i+} - V_{i-}). \quad (4)$$

Se as impedâncias  $Z_i$  e  $Z_f$  são resistências puras, a tensão de saída é proporcional a diferença entre as tensões de entrada, resultando na configuração conhecida como subtrator. Uma simples multiplicação por constante é obtida conectando uma das entradas do circuito ao terminal terra. Caso seja a entrada  $V_{i+}$ , o resultado é o amplificador inversor mostrado na Fig. 3A. Uma soma ponderada analógica é obtida com o circuito da Fig. 3B. Substituindo a resistência  $R_f$  de realimentação do somador por uma capacitância  $C$ , como mostra a Fig. 3C, obtêm-se o integrador ponderado, cuja saída é proporcional a integral da soma ponderada das entradas. O integrador ponderado pode ser considerado como a célula mais importante para implementações eletrônicas análogas, uma vez que os modelos dinâmicos de sistemas físicos são constituídos por um conjunto de equações diferenciais.

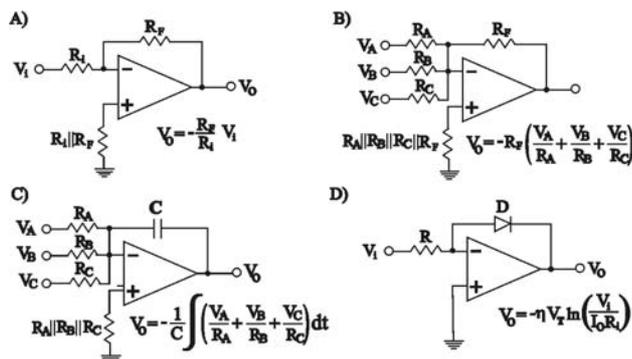


Figura 3 - Circuitos com amplificadores operacionais: A) Amplificador inversor B) Amplificador somador.

Circuitos não lineares podem ser sintetizados utilizando amplificadores operacionais. Substituindo a impedância  $Z_f$  ou  $Z_i$  por um diodo retificador (cuja característica tensão-corrente é logarítmica) obtêm-se amplificadores logarítmicos (Fig. 3D) ou antilogarítmicos, respectivamente. Outros circuitos não lineares podem

ser sintetizados dividindo a curva representativa de uma determinada função em diversos segmentos de reta e, com o auxílio de dispositivos polarizados (diodos, transistores, etc) inseridos no caminho de entrada e/ou realimentação, obter a inclinação para cada trecho. Por meio desta filosofia, unidades operacionais com características de saída descontínuas (zona morta, saturação, histerese, comparação, etc) podem ser obtidas. Observe que, na maioria dos circuitos com amplificadores operacionais, a polaridade da saída é invertida em relação à entrada, o que pode ser usado em muitas situações com o objetivo de simplificar a versão final do circuito [5].

A partir da união destes circuitos, é possível realizar unidades de cálculo analógicas mais complexas, tais como multiplicadores, divisores, extratores de raiz, etc. Algumas unidades utilizando amplificadores operacionais podem ser encontradas na forma de circuitos integrados, tais como o amplificador logarítmico LOG100 [6] e o multiplicador analógico MPY634 [7]. Em particular, a configuração básica do multiplicador analógico MPY634 (Fig 4A e 4B) é mostrada na Fig. 4C, e com algumas modificações, pode executar várias outras funções não lineares, tais como divisão (Fig. 4D), extração de raiz quadrada (Fig. 4E) e funções trigonométricas (Fig. 4F) [7]. Uma vez que o tema “amplificador operacional” é muito vasto, recomenda-se o estudo em bibliografia especializada [5], [8], [9], [10] para maiores informações.

A partir da adequada interligação destes circuitos, é possível montar uma estrutura capaz de reproduzir o modelo matemático de um determinado sistema físico. O primeiro passo para o projeto de um circuito eletrônico análogo é obter as equações diferenciais que constituem o modelo de estados do sistema. Cada equação de estado será implementada basicamente utilizando o circuito integrador ponderado mostrado na Fig. 3C. A seguir, deve-se determinar o valor máximo que as variáveis de estado podem alcançar, e se necessário, alterar o modelo original aplicando fatores de escalas apropriados de forma a contornar as limitações de amplitude, as quais são geralmente impostas pela fonte de alimentação. O valor normalizado de cada resistor conectado à entrada de um integrador corresponde ao inverso do respectivo parâmetro da equação escalada em amplitude que se quer reproduzir eletronicamente. O esquema completo é obtido interligando adequadamente as entradas e saídas de cada integrador visando reproduzir o sistema de equações.

Outra limitação de projeto corresponde às frequências dos sinais analógicos, uma vez que os dispositivos eletrônicos e os instrumentos de medição usados para implementar o circuito apresentam uma velocidade de resposta que não deve ser excedida. Por outro lado, o tempo real para observar o comportamento dinâmico de um sistema lento pode ser desnecessariamente muito extenso. A solução para

estes problemas é a aplicação de um fator que permita aumentar ou diminuir a velocidade de operação do circuito em relação ao tempo real caso isso seja realmente necessário. O escalamento do tempo é feito multiplicando ou dividindo todas as equações do modelo de estados por uma constante, o que corresponde na prática a selecionar os valores da resistência base e dos capacitores de acordo com a dinâmica desejada para a implementação experimental.

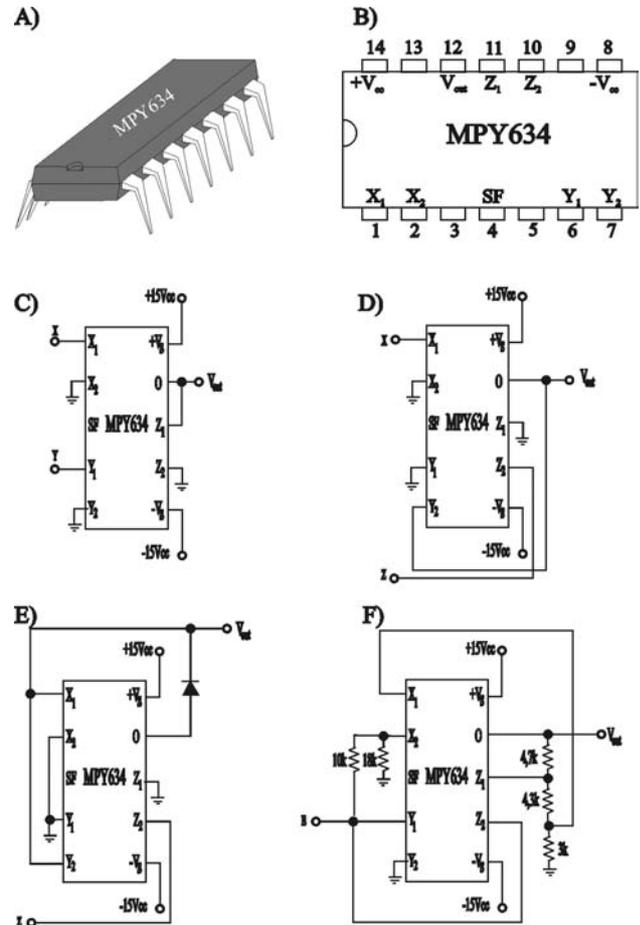


Figura 4 - Configurações do MPY634: A) Encapsulamento, B) Pinagem, C) Multiplicador, D) Divisor, E) Extrator de raiz quadrada, F) gerador de função seno.

### 3. Exemplos

#### 3.1. Sistema forçado de Duffing

O sistema forçado de Duffing representa um sistema massa-mola não linear excitado por uma força externa periódica. A equação diferencial que descreve as *vibrações forçadas* da massa  $m$  é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = F_o \cos(\omega t), \quad (5)$$

onde  $x$  é a posição da massa em relação a seu ponto de equilíbrio e o termo  $[kx + \beta x^3]$  representa a força exercida na massa por uma mola não linear. Se  $\beta = 0$ , o

sistema de Duffing resulta em uma equação linear com soluções periódicas estáveis. Adotando  $k = -1$  e  $m = c = \beta = \omega = 1$ , o modelo de estados do sistema de Duffing pode ser escrito como [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y + x - x^3 + F_o \cos(t). \end{aligned} \quad (6)$$

A Fig. 5 mostra os planos de fase obtidos através de simulação numérica quando a amplitude da força ex-

terna  $F_o$  é variada na faixa 0,6 a 0,8, admitindo como condições iniciais  $x(0) = 1, y(0) = 0$ . A figura indica uma simples oscilação em torno de um ponto crítico se  $F_o = 0,6$  (Fig. 5A), e oscilações com “período dobrado” se  $F_o = 0,7$  (Fig. 5B). Se  $F_o = 0,8$ , o sistema de Duffing apresenta uma característica dinâmica imprevisível e extremamente sensível aos parâmetros e às condições iniciais, configurando-se em um sistema caótico (Fig. 5C).

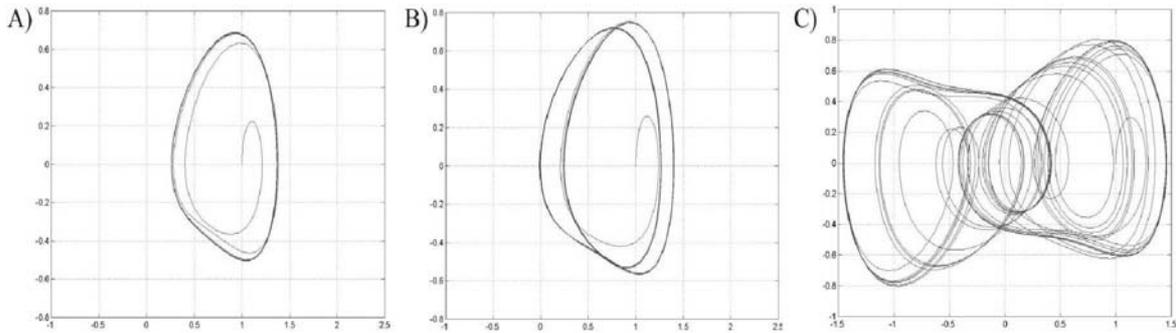


Figura 5 - Planos de fase para o sistema forçado de Duffing: (A)  $F_o = 0,6$ ; (B)  $F_o = 0,7$ ; (C)  $F_o = 0,8$ .

Considerando que um circuito análogo é normalmente alimentado com uma tensão igual ou superior a  $\pm 5$  V, os valores máximos das variáveis de estado ( $|x_{max}| = 1,5$  e  $|y_{max}| = 0,8$ ) estão dentro de uma faixa aceitável que permite uma condição de operação em meia escala, sendo possível realizar uma implementação eletrônica direta do sistema de Duffing. Entretanto, o escalamento de amplitude será aplicado ao sistema original para aumentar o nível dos sinais para a faixa de  $\pm 6$ , o que é obtido redefinindo as variáveis de estado como  $u_o = 4x$  e  $v_o = 8y$ . O sistema de Duffing escalado em amplitude é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{u}_o &= \frac{1}{2}v_o, \\ \dot{v}_o &= -v_o + 2u_o - \frac{25}{2} \left[ \frac{u_o^3}{100} \right] + 8F_o \cos(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Para facilitar a implementação final, o termo  $u_o^3/100$  é colocado em evidência. Com o objetivo de evitar ampliações intermediárias, todo sistema deve ser dividido pelo parâmetro de maior valor (no caso, 12,5), o que implica em uma redução da dinâmica do sistema em relação ao original. Assim, é necessário reduzir a frequência do sinal externo por um fator de 12,5 para adaptar o sinal de entrada às novas condições dinâmicas. Considerando  $F_o = 0,8$ , o sistema de Duffing a ser implementado eletronicamente é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{25}v, \\ \dot{v} &= -\frac{2}{25}v + \frac{4}{25}u - \left[ \frac{u^3}{100} \right] + \frac{64}{125}F_o \cos\left(\frac{2}{25}t\right). \end{aligned} \quad (8)$$

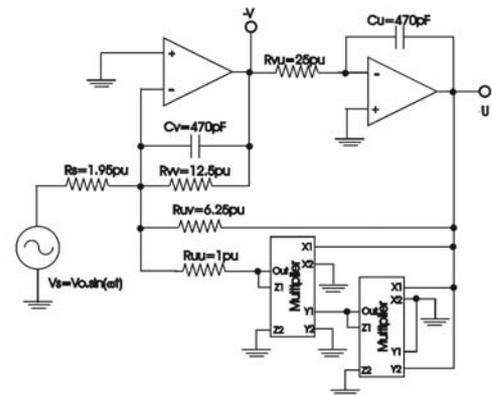


Figura 6 - Circuito eletrônico baseado no sistema forçado de Duffing.

A implementação eletrônica exata da Eq. 8 é mostrada na Fig. 6, sendo utilizados dois CI's MPY634 (multiplicador analógico), um CI TL074 (amplificador operacional quádruplo), dois capacitores e cinco resistores. Para reproduzir eletronicamente a segunda equação do sistema (Eq. 8), as entradas do respectivo integrador analógico são admitidas como  $u, u^3/100, -v$  e o sinal externo. Uma vez que o sinal de saída deste integrador será  $-v$ , este pode ser realimentado para a sua entrada diretamente. Um segundo integrador é utilizado para obter  $u$ , a partir do qual se obtém  $u^3/100$  através de dois multiplicadores analógicos, sendo ambos sinais retornados as respectivas entradas do primeiro integrador. O sinal de excitação externa pode ser obtido

a partir de um gerador de sinais eletrônico. As resistências de entrada dos integradores estão associadas aos parâmetros da Eq. 8, sendo os seus valores na forma normalizada em p.u. dados pelo inverso de cada parâmetro. O valor do resistor base e dos capacitores são escolhidos conforme a dinâmica desejada para o sistema análogo.

A dinâmica da versão eletrônica análoga do sistema de Duffing originalmente proposto é determinada pelo valor da resistência base, adotada como 10 k $\Omega$ , e dos capacitores  $C_u$  e  $C_v$  de 470 pF. Na implementação ex-

perimental, visando obter uma reprodução mais precisa do sistema de Duffing, foram utilizados resistores de precisão e capacitores styroflex, cujos valores são pouco susceptíveis a variações paramétricas. Utilizando um osciloscópio analógico de 20 MHz operando no modo  $x-y$ , os planos de fase para uma entrada  $V_o = 0,7$  V, 0,8 V e 1,1 V foram observados experimentalmente para uma frequência de excitação de cerca de 2,7 kHz (Fig. 7). Nota-se que as amplitudes dos sinais na implementação experimental permanecem restritas dentro da faixa de  $\pm 6$  V.

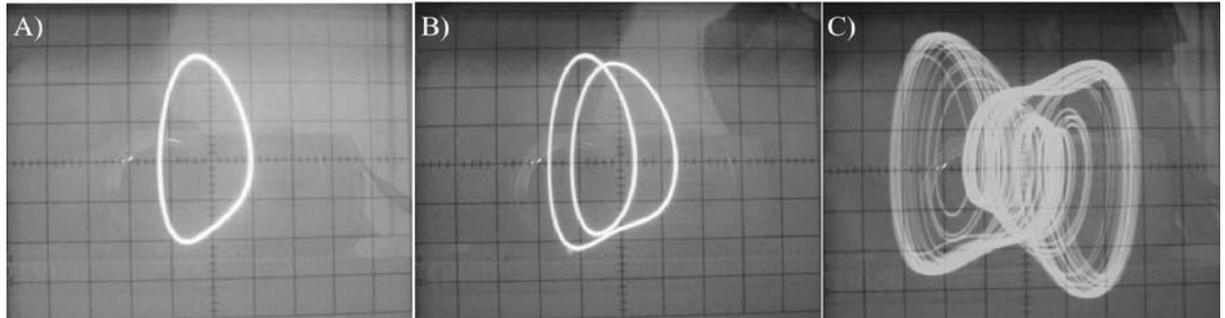


Figura 7 - Planos de fase observados no osciloscópio (CH X = 1 V/div e CH Y = 1 V/div) para o sistema forçado de Duffing: (A)  $V_0 = 0,7$ ; (B)  $V_0 = 0,8$ ; (C)  $V_0 = 1,1$ .

### 3.2. Sistema de Rössler

Um exemplo de sistema autônomo com comportamento caótico é creditado a Otto Rössler, um médico não praticante que elevou o estudo de sistemas caóticos ao nível filosófico. O atrator de Rössler é formado por um conjunto de equações de Navier-Stokes derivado a partir da cinética química, sendo descrito por três equações diferenciais não lineares acopladas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c).\end{aligned}\quad (9)$$

O atrator de Rössler consiste em um arranjo conhecido como “bandas”, cujas projeções nos planos  $xy$  e  $xz$  são mostradas na Fig. 8 para  $a = b = 0,2$  e  $c = 5,7$  [12]. Observa-se que as variáveis de estado atingem  $|x_{max}| = 11,43$ ,  $|y_{max}| = 10,76$  e  $|z_{max}| = 22,84$ , os quais ultrapassam os limites aceitáveis para uma implementação eletrônica direta, uma vez que a tensão de alimentação utilizada neste trabalho é de  $\pm 15$ . Aplicando o escalamento de amplitude ao sistema de Rössler, as variáveis de estado são redefinidas como  $u_o = x/2,5$ ,  $v_o = y/2,5$  e  $w_o = z/5$  com o objetivo de restringir as suas variações dentro da faixa de  $\pm 5$ . O sistema é convertido em:

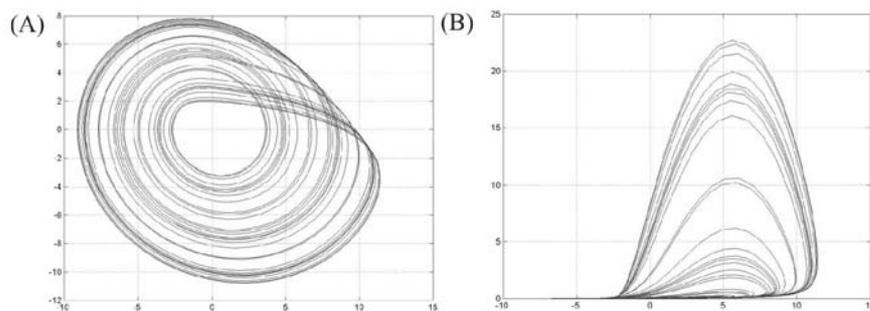


Figura 8 - Atrator de Rössler: (A) projeção no plano  $xy$ ; (B) projeção no plano  $xz$ .

$$\begin{aligned} \dot{u}_o &= -v_o - 2w_o, \\ \dot{v}_o &= u_o + 0,2v_o, \\ \dot{w}_o &= 0,04 + 25 \left( \frac{u_o w_o}{10} \right) - 5,7w_o. \end{aligned} \tag{10}$$

Para evitar a amplificação intermediária de qualquer sinal, o sistema de Rössler é normalizado dividindo suas equações pelo maior parâmetro, resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{25}v - \frac{2}{25}w, \\ \dot{v} &= \frac{1}{25}u + \frac{1}{125}v, \\ \dot{w} &= \frac{1}{625} + \left( \frac{uw}{10} \right) - \frac{57}{250}w. \end{aligned} \tag{11}$$

Devido à função de transferência do multiplicador analógico, o produto entre variáveis é colocado em evidência. O diagrama esquemático final para o circuito eletrônico de Rössler é mostrado na Fig. 9, usando um multiplicador analógico, um amplificador operacional quádruplo, três capacitores e nove resistores. A

dinâmica do sistema é determinada pela resistência base (0,4 kΩ) e pelo valor dos capacitores (560 pF). As bandas de Rössler obtidas experimentalmente foram observadas em um osciloscópio analógico de 20 MHz (Fig. 10) sendo que as amplitudes dos sinais ficaram à faixa de ±5 V.

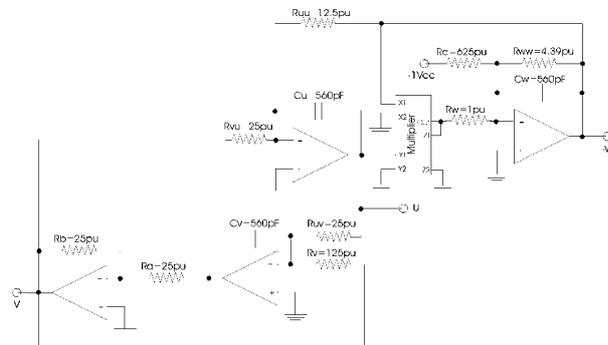


Figura 9 - Circuito baseado no sistema caótico de Rössler.

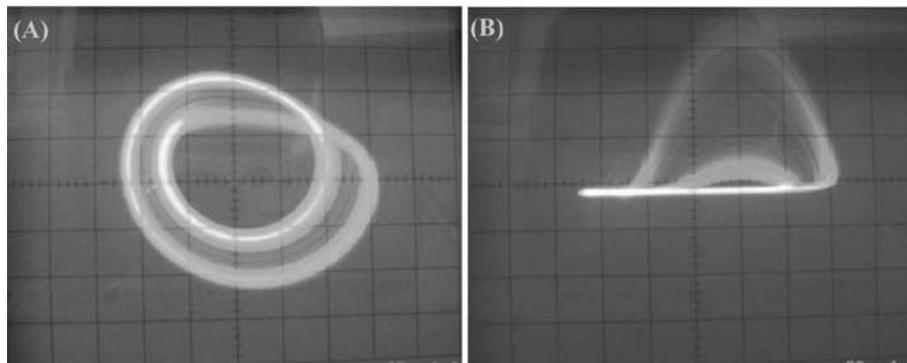


Figura 10 - Atrator caótico de Rössler observado no osciloscópio (CH X = 2 V/div e CH Y = 2 V/div).

### 4. Considerações finais

Considerando as dificuldades existentes para a implantação de um laboratório, a analogia eletrônica pode consistir em uma boa solução para o desenvolvimento e a implementação de experimentos didáticos para o ensino de Física, uma vez que proporciona uma alternativa que introduz maior realismo na educação do que a simples simulação numérica de modelos matemáticos. A partir dela, é possível obter aproximações experimentais de sistemas complicados e caros utilizando protótipos simples, baratos, robustos, versáteis e funcionais, os quais incorporam vários aspectos que facilitam o estudo em termos práticos de diversos fenômenos importantes não observáveis em modelos matemáticos. Entretanto, as variações dos sinais elétricos devem ser restringidas para a obtenção de uma condição de operação de meia escala devido às limitações de amplitude e frequência, sendo muitas vezes necessário modi-

ficar o modelo original através da aplicação de fatores de escala para a amplitude e tempo para tornar realizável a versão eletrônica do sistema.

A metodologia apresentada neste artigo permite obter circuitos eletrônicos análogos realizáveis que reproduzam adequadamente o comportamento dinâmico de sistemas físicos os quais podem ser utilizados como aproximação experimental em vários experimentos práticos didáticos. Tais circuitos podem ser montados em uma versão definitiva em placas de circuito impresso ou de forma provisória utilizando uma matriz de contatos (proto-board). Como exemplo, esta metodologia foi aplicada para desenvolver o projeto das versões eletrônicas de sistemas físicos que apresentam comportamento caótico (Duffing e Rössler), os quais podem ser utilizados para gerar sinais caóticos e verificar aspectos de controle, sincronização e identificação de sinais em experimentos didáticos. Os circuitos eletrônicos experimentais foram implementados em uma matriz de

contatos e reproduziram satisfatoriamente o comportamento dinâmico dos sistemas em questão.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro proporcionado pelo CNPq, CAPES e FAPEMIG e o apoio dado pela Texas Instruments Inc pela doação dos componentes que permitiram as implementações experimentais.

## Referências

- [1] A.A.R. Coelho, O.M. Almeida, J.E.S. Santos e R.R. Sumar, COBENGE'2001, 154 (2001).
- [2] K.J. Aström e A.-B. Osterberg, IEEE Control Syst. Mag. **6**, 37 (1986).
- [3] D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock e M.I. Dykman, Rep. on Prog. in Phys. **61**, 889 (1998).
- [4] R. Rocha, R.F. Machado e L.S. Martins-Filho, COBEM'2003, 17 (2003).
- [5] A. Dianese, *Computação e Simulação Analógica e Híbrida* (Ed. Guanabara 2, Rio de Janeiro, 1984).
- [6] Burr-Brown Corporation, *Precision Logarithmic and Log Ratio Amplifier* (2000).
- [7] Burr-Brown Corporation, *Wide Bandwidth Precision Analog Multiplier* (1995).
- [8] A.F. Gruiter, *Amplificadores Operacionais Fundamentos e Aplicações* (McGraw-Hill, São Paulo, 1988).
- [9] L.O. Chua, C.A. Desoer e E.S. Kuh, *Linear and Non-linear Circuits* (McGraw-Hill, Nova Iorque, 1987).
- [10] J. Millman e C.C. Halkias, *Eletrônica Dispositivos e Circuitos*, (McGraw-Hill, São Paulo, 1981).
- [11] Z.-P. Jiang, IEEE Trans. on Circ. and Syst. I **49**, 244 (2002).
- [12] A.I. Mahla e L. Torres, ICECS2001, 465 (2001).