

Notas e Discussões

Medidas de elétrons livres no vácuo e estatística de Fermi-Dirac (*Vacuum free electron measurements and Fermi-Dirac statistics*)

Everton Lüdke¹

*Departamento de Física, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria,
Santa Maria, RS, Brasil*

Recebido em 24/2/2011; Aceito em 21/6/2011; Publicado em 21/11/2011

Neste artigo, apresento uma série de experimentos laboratoriais de baixo custo para comprovação de conceitos fundamentais da estatística quântica de Fermi-Dirac e medidas quantitativas da densidade de corrente de um feixe de elétrons livres térmicos no vácuo para comprovar experimentalmente a equação de Richard-Dushman. As técnicas experimentais e a análise numérica para a equação da densidade de corrente são discutidas nesse trabalho. Válvulas termoiónicas comerciais se mostraram excelentes para corroborar os conceitos discutidos no presente trabalho.

Palavras-chave: medidas de elétrons livres, estatísticas quânticas, Fermi-Dirac.

In this paper, a sequence of low-cost teaching lab experiments to assess fundamental concepts in Fermi-Dirac quantum statistical mechanics and quantitative measurements of current density of a free thermal electron in vacuum to prove experimentally the Richardson-Dushman equation. Experimental techniques and numerical analysis for the current density are also discussed in this work. Thermoionic-emission tubes have proven to be excellent to corroborate the concepts discussed in this paper.

Keywords: free electron measurements, quantum statistics, Fermi-Dirac.

1. Introdução

Em universidades brasileiras, o ensino de mecânica estatística quântica em nível de cursos de graduação de física e engenharia eletrônica é essencialmente teórico e carece de experimentos que possibilitem a comprovação de até mesmo os conceitos mais básicos, havendo a necessidade da inclusão de experimentos que permitam aos alunos, a visualização das propriedades físicas envolvidas na teoria.

Em particular, a função-trabalho de metais pode ser obtida não só pela análise quantitativa do efeito fotoelétrico com experimentos comerciais de alto custo, mas também por medida de corrente elétrica em placas metálicas aquecidas em válvulas tipo diodo termoiónico [1-3], cujo conceito pode ser generalizado para estudo da aplicação das estatísticas quânticas como a de Fermi-Dirac para obtenção da lei de Richardson-Dushmann na emissão termoiónica de elétrons por metais [4].

Nesse artigo, proponho uma sequência de experimentos simples que visam o estudo semiquantitativo da densidade de corrente termoiónica em diodos retificadores a vácuo de baixo custo, a fim de demonstrar conceitos de mecânica estatística quântica em laboratórios didáticos em universidades.

2. A escolha do diodo termoiónico

Como diodos termoiónicos retificadores, temos os diodos tipo tipo “booster” que eram originalmente empregados como diodos de supressão em etapas de alta tensão (saída horizontal) de televisores valvulados antigos, onde se necessitava de diodos que suportassem uma tensão reversa máxima de 7,5 kV e 500 mA de corrente máxima de placa. Como exemplo dessas válvulas, podemos encontrar ainda no mercado brasileiro, as válvulas EY88 e PY88 que apenas diferem entre si nas características de operação do filamento de tungstênio.

A válvula EY88 (ou equivalentes 6AL3, 6V3, 6AF3, 6BR3) com filamento que é aquecido com uma diferença de potencial alternado de 6,3 V e com consumo médio de corrente de 1,5 A. O diodo PY88 (30AE3, 26AE6) possui a mesma estrutura física interna dos elementos que a EY88, embora o filamento necessite 30 Volts em corrente alternada mas com um consumo de corrente bem menor (300 mA).

Ambas as válvulas funcionam pelo método de aquecimento indireto, onde o filamento de tungstênio aquece um catodo cilíndrico de metal, revestido por uma camada que consiste em uma mistura de óxidos de me-

¹E-mail: eludke@smail.ufsm.br.

tais alcalinos como bário e estrôncio, de modo que a uma temperatura de operação de 1000 K obtem-se uma densidade de corrente na ordem de 500 mA cm^{-2} e com uma função-trabalho do cátodo de $\phi = 1,1 \text{ eV}$ ou aproximadamente quatro vezes menor que o valor obtido para o tungstênio metálico [5], sendo uma característica de montagem de válvulas termoiônicas de baixa voltagem e corrente empregadas em rádios e televisores antigos.

Assim, a escolha da EY88 é feita pela sua praticidade de manuseio, disponibilidade no mercado, documentação como fichas técnicas e notas de aplicação

e bom desempenho nos experimentos que são propostos nesse trabalho. Outras válvulas que foram testadas nos presentes experimentos foram a 5V4, EZ80 e DY86 (aquecimento indireto) e 5Y3 e 1V2 (aquecimento direto), com resultados similares.

3. Materiais e métodos

Para a leitura da potência de ruído elétrico produzida pelo diodo a vácuo, elaborou-se o esquema ilustrado na Fig. 1.

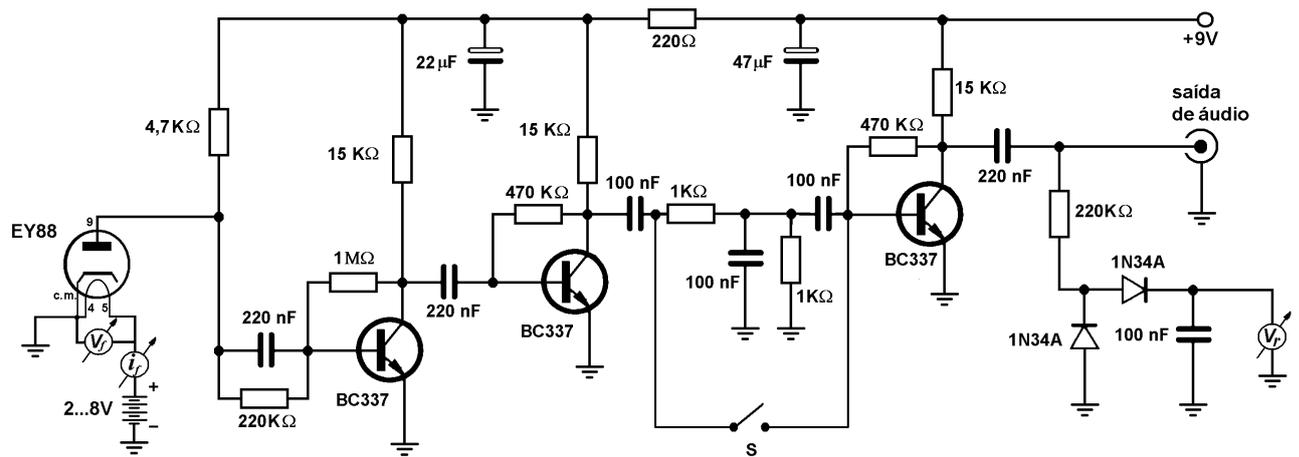


Figura 1 - Amplificador de alta sensibilidade para medida da potência de ruído elétrico com um tempo de integração $\tau = 10 \text{ ms}$. Um conector RCA está disponível para que os alunos possam escutar o ruído elétrico através de um amplificador de áudio externo e uma caixa de som, para ter uma idéia da natureza estocástica do "shot noise".

Os materiais empregados para esse experimento foram: uma fonte de alimentação de bancada regulada e estabilizada de 0-12 V (2A), um amplificador de ruído descrito a seguir e três multímetros digitais ICEL MD1600 para medir a tensão e corrente de filamento (V_f e i_f) e o potencial de ruído de saída, que é proporcional à potência do nível de ruído do anodo da válvula.

O circuito é um amplificador de alto ganho constituído por três transistores BC337 ou BC548C em cascata cuja saída pode tanto alimentar uma caixa de som para que os alunos possam ouvir o ruído branco produzido pelas flutuações térmicas dos elétrons que incidem no anodo da válvula ou um filtro RC centrado em 1950 kHz e com largura de banda de 640 kHz para rejeitar interferência de 60 Hz da rede elétrica está colocado antes da amplificação pelo último transistor.

Um circuito retificador com diodos de germânio 1N34A e um integrador RC com constante de integração $\tau = RC = 2,2 \times 10^4 \Omega \cdot 1 \times 10^{-7} \text{ F} \sim 12 \text{ ms}$ permite obter a potência rms do sinal na forma de um nível de tensão contínua medida pelo multímetro V_r [6]. Mesmo assim, deve-se embrulhar bem o bulbo de vidro

da válvula com papel alumínio aterrado para evitar a captação de interferência da rede elétrica.

Assim, o objetivo é variar V_f , medir i_f e V_r produzido pelo aparato e interpretar os resultados, o que será discutido na próxima seção.

Esse circuito consiste em uma adaptação de ganho reduzido de um amplificador biológico de baixo custo originalmente empregado em laboratórios de eletrofisiologia animal [7]. O nível d.c. de saída é medido em volts com o auxílio de um multímetro digital de boa qualidade, sendo uma grandeza diretamente proporcional à potência total em ruído produzido no anodo da válvula. Como a calibração do nível de voltagem na saída do amplificador em miliwatts envolveria um sistema bem mais complexo, optei por não efetuar a calibração da potência de ruído e fazer a presente análise com $P_{ruído} \propto V_r$ expresso em unidades arbitrárias de voltagem. A chave "S" na Fig. 1 ativa o filtro ou o elimina, dependendo da redução dos níveis de interferência da rede elétrica local.

Na válvula EY88, o capacete metálico é conectado internamente ao cátodo metálico que circunda o fila-

mento enquanto que o pino 9 está conectado à placa ou anodo da válvula. Os pinos 4 e 5 estão conectados ao filamento de aquecimento. Os pinos são contados no sentido horário com a válvula vista da base.

Na prática, necessita-se embrulhar bem o bulbo de vidro da válvula com papel alumínio conectado eletricamente ao capacete metálico aterrado, assim como os cabos de sinal que conectam a válvula à entrada do amplificador que devem ser do tipo coaxial de áudio de boa qualidade e também aterrados, a fim de evitar a captação de interferência da rede elétrica.

4. Coleta de dados

4.1. Análise do filamento como resistor não-linear

O diodo termoiônico possibilita duas formas de estudo de resistências não-lineares tanto pelas propriedades elétricas do filamento quanto pelas propriedades do fluxo de elétrons no vácuo entre o catodo e o anodo [6].

A fonte de alimentação comercial de 12 V possibilita o ajuste de tensão regulável entre 2 e 8 V fornece a corrente elétrica i_f necessária para aquecimento do filamento, que é medida em mA por um multímetro digital na posição A_1 . Cuidados deve ser tomados no sentido de não exceder 8,0 V e evitar que o filamento se queime.

A Fig. 2 mostra os dados experimentais do filamento da válvula, cuja relação tensão-corrente constitui um bom exemplo de orpática de determinação experimental da lei de Ohm macroscópica, mostrando que o filamento pode ser aproximado por um resistor não-linear pois não obedece à relação $R = V/I$, pois não pode ser caracterizado por uma resistência elétrica independente da voltagem aplicada. Na Fig. 2 podemos observar os resultados experimentais do teste de linearidade da lei de Ohm para o filamento da válvula EY88 e à esquerda), a determinação da potência dissipada pelo filamento P_{catodo} por efeito Joule, em watts, versus diferença de potencial aplicada V_f , antes dos valores de saturação de corrente que formam o platô em $V_{ac} > 18$ V.

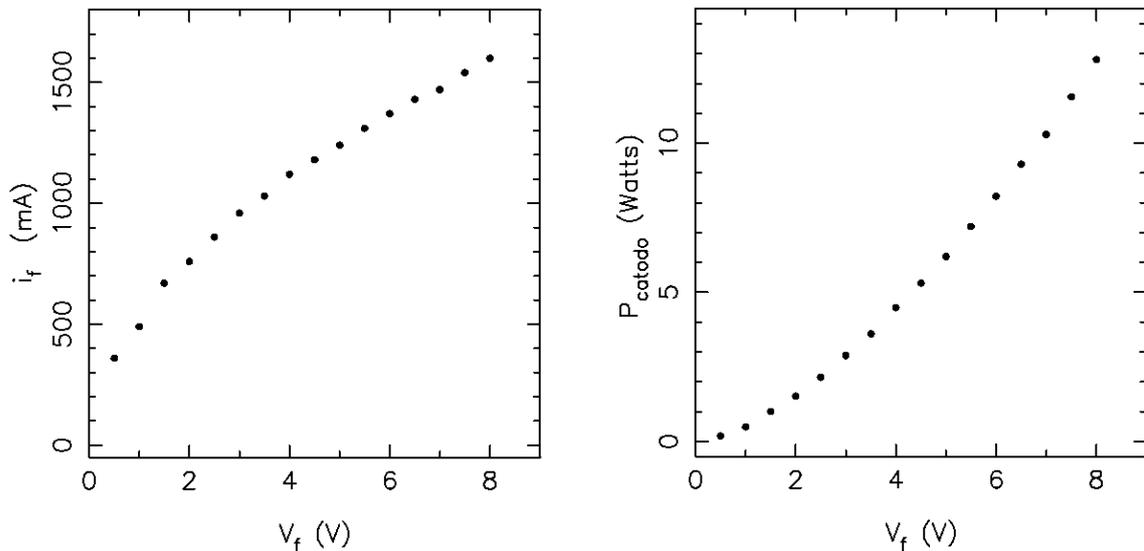


Figura 2 - Análise do filamento da válvula EY88 como um resistor não-linear, conforme o aparato experimental da Fig. 1.

4.2. Análise da corrente termoiônica

A corrente termoiônica se deve ao potencial acelerador entre o anodo e catodo e basicamente consiste em um gás de elétrons livres que partem do catodo e incidem no anodo, colidindo elasticamente e provocando um excesso de cargas negativas nesse último e que circulam no circuito pela ação da força eletromotriz da fonte de alimentação regulável.

A relação tensão-corrente para comprovar a lei de Ohm para um feixe de elétrons livres no vácuo, pode ser feita como experimento adicional conforme mostra a Fig. 4. Para o aquecimento do filamento foi empregado

um transformador com saída de 6 V, 2 A e uma fonte regulável de 30 V para variar a diferença de potencial entre o anodo e catodo (V) e medir a corrente de anodo correspondente (A).

Dois multímetros digitais foram usados para medir a tensão e corrente de placa pelos alunos, que elaboraram uma análise gráfica, mostrando que a relação tensão-corrente é linear acima de cerca de 2,2 V de tensão de placa e não-linear abaixo desse limite. Assim, os alunos também puderam discutir entre si, as diferenças entre meios lineares e não-lineares para a propagação da corrente eletrônica. Os alunos podem usar esse método para comprovar a relação não-linear entre a tensão e

corrente para junções P-N de diodos semicondutores de silício e apontar as semelhanças entre a natureza microscópica da corrente elétrica em ambos os dispositivos, justificando as relações comuns entre eles.

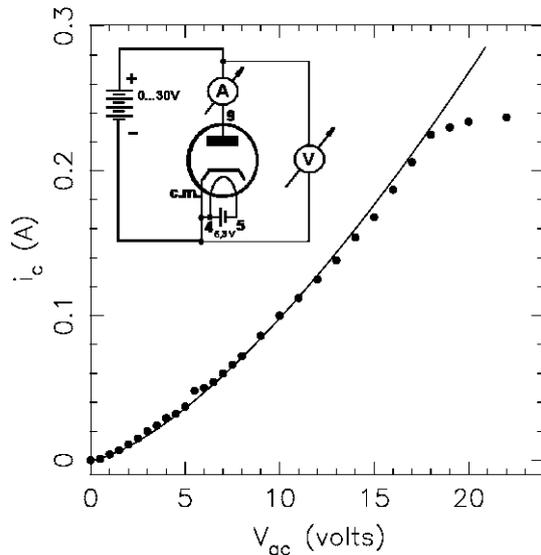


Figura 3 - Demonstração experimental de relação tensão-corrente (Lei de Child) para o diodo a vácuo.

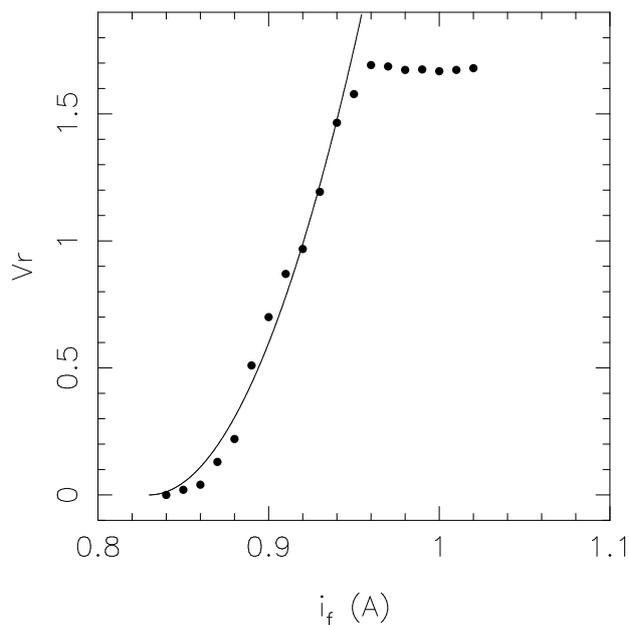


Figura 4 - Potência de ruído elétrico, em unidades arbitrárias, medida na saída do amplificador versus potência dissipada no cátodo.

A relação corrente-tensão para polarização direta pode ser ajustada como $I_a = \alpha V_a^\beta$, que é conhecida como a Lei de Child se $\beta = 3/2$ e que surge como uma linha reta no gráfico tensão-corrente feito pelos alunos no papel dilog [8]. Em polarização inversa, o aluno pode notar que a corrente elétrica é sempre nula, indicando que o diodo conduz somente na direção cátodo-anodo e que esse dispositivo pode ser aplicado na reti-

ficação de sinais de tensão alternada. A lei de Child é facilmente comprovada com o esquema empregado na Fig. 3. Nessa figura, a corrente de cátodo (i_c) medida pelo miliamperímetro A é plotada *vs.* a tensão anodo-cátodo (V_{ac}) medida pelo voltímetro V. A linha contínua superposta aos pontos é o ajuste da lei de Child na forma $i_c = 3,46 \times 10^{-3} V_{ac}^{1,46}$.

4.3. Análise da equação de Richardson-Dushman

A equação de Richardson-Dushman pode ser facilmente obtida a partir da mecânica estatística quântica de Fermi-Dirac da seguinte forma

$$J = AT^2 e^{-\phi/kT}. \quad (1)$$

A equação de Richardson-Dushman (Eq. (1)) pode ser modificada para o caso de existir uma pequena barreira de potencial de altura V_0 na superfície do metal aquecido, sendo dada em mA mm² por [4]

$$J = AT^2 \left(e^{-\psi/kT} + \frac{1}{4} e^{-2\psi/kT} + \frac{1}{9} e^{-3\psi/kT} \right), \quad (2)$$

onde $\psi = \phi + V_0$.

Em ambas as expressões, a emissão eletrônica por unidade de área do cátodo é simplesmente a densidade de corrente dividido pela carga do elétron. Entretanto, experimentalmente se verifica uma grande variação nos valores de A que provavelmente se deve aos calores específicos e atomização dos diferentes metais, que provoca um efeito de erosão nos cátodos de tubos a vácuo [9]. Portanto, recomendo o uso de válvulas adquiridas de lotes antigos sem uso, ao invés daquelas recicladas de chassis antigos de televisores valvulados, para melhor precisão dos dados coletados.

Portanto, a densidade de corrente do gás de elétrons emitido pelo cátodo, em mA mm⁻², é dada em termos da constante de Richardson $A = 1202$ mA mm⁻² K², T é a temperatura do cátodo emissor em K, ϕ é a função-trabalho do material do cátodo, que pode ser medida também pelo efeito fotoelétrico ou determinada teoricamente e $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J K⁻¹ é a constante de Boltzmann.

A temperatura de cátodos em válvulas termoiônicas normalmente é medida com termocúmulas tipo VR-5/20 montadas internamente ou com o auxílio de pirômetros ópticos [7,8], quando se deseja usar esse efeito para determinar a função-trabalho para metais. Entretanto, para a comprovação da equação de Richardson-Dushman não há necessidade de medidas precisas da temperatura e usarei um método aproximado para estimar efeito do aquecimento pela dissipação por efeito Joule pela corrente elétrica do filamento, que é suficiente para possibilitar aos alunos, conclusões sobre os aspectos físicos envolvidos no experimento.

A temperatura do catodo pode ser estimada diretamente, usando a suposição que quando o filamento for aquecido com uma diferença de potencial especificada pelo fabricante (6,3 V), a temperatura do catodo será 1000 K e assumindo-se que a potência dissipada pelo filamento por efeito Joule é o indicador de temperatura. Uma relação parabólica bem-definida entre a potência dissipada pelo filamento $P = i_f V_f$ em watts em função da diferença de potencial aplicada V_f permite estimar a temperatura de catodo semi-empiricamente, em função de V_f .

A dispersão da distribuição de energia cinética dos elétrons do gás é medida pela dispersão da distribuição espectral do “shot noise”. Os dados experimentais de V_r vs. i_f dispostos na Fig. 4 permitem concluir que existe um crescimento monotônico da população de elétrons de mais alta energia em função da corrente elétrica do filamento ou, equivalentemente a temperatura do catodo. Esse gráfico pode ser interpretado em bases físicas, assumindo que a potência dissipada pelo cátodo é uma função linear da temperatura e que V_r é um indicador da proporção da população dos elétrons mais energéticos liberados por ele. Os alunos podem discutir entre si e concluir que o fator exponencial da equação de Richardson-Dushman para temperaturas acima de 500 K e com $\phi = 1,1$ eV varia muito pouco em comparação com o fator multiplicativo de temperatura, T^2 e que basta ajustar uma lei quadrática para esse gráfico para comprovar a fórmula de Richardson-Dushman.

Na Fig. 4 o ajuste quadrático está superposto, com um ajuste na forma $V_r(i_f) = 122,0(i_f - 0,83)^2$, onde o expoente 2 comprova a equação de Richardson-Dushman e a utilização do modelo de gás de férmions para um feixe de elétrons livres no vácuo, empregando esse simples método de análise de ruído da válvula termoiônica. Um platô de ruído é obtido indicando que a corrente de saturação do diodo foi atingida com a corrente de filamento partir de 0,96 A, indicando um efeito de avalanche eletrônica.

5. Discussão final e conclusões

Nesse artigo, foi apresentado e discutido um método experimental para estudo quantitativo da equação de

Richardson-Dushman obtida a partir da mecânica estatística de Fermi-Dirac com emprego do diodo a vácuo tipo EY88 ainda disponível no mercado brasileiro de componentes eletrônicos. A novidade do método consiste em evitar empregar a lei de Childs para mostrar a equação de Richardson-Dushman, mas as flutuações estatísticas da função-distribuição de velocidades de Fermi-Dirac para analisar as flutuações r.m.s. do “shot noise” em função da temperatura do catodo emissor, semiquantitativamente e com bons resultados experimentais.

A qualidade das medidas possibilita não só o estudo do fenômeno da condução termoiônica mas também investigar a válvula como um dispositivo condutor não-linear, o que é um experimento raro de encontrar em laboratórios didáticos de física básica e que mostre, conceitualmente, a origem da lei de Ohm microscópica.

Finalmente, mas não menos importante, é que a implementação desse experimento implica em na aquisição de habilidades práticas em eletrônica, possibilitando o ensino da teoria de componentes eletrônicos em dispositivos de estado sólido, de importância em eletrônica moderna.

Referências

- [1] O.W. Richardson, *Phil. Mag.* **23**, 594 (1912).
- [2] S. Dushman, *Phys. Rev.* **21**, 623 (1923).
- [3] E.F. Lima, M. Foschini e M. Magini, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **23**, 391 (2001).
- [4] P. May, *Electronics World Dec.*, 1013 (1997).
- [5] R.F. Voss and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 42 (1976).
- [6] P.F. Tipler, *Física para Cientistas em Engenharia - Eletricidade e Magnetismo*, (Editora Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1995), v. 3.
- [7] W. Barry, *J. Sci. Instrum.* **40**, 374 (1963).
- [8] C.L. Hemenway, R.W. Henry and M. Caulton, *Physical Electronics* (John Wiley and Sons, New York, 1962), p. 62.
- [9] A.K. Vijn and P. Lenfant, *Can. J. Phys.* **51**, 111 (1973).