

A TEORIA DAS FILAS APLICADA AOS SERVIÇOS BANCÁRIOS*

1. Introdução;
2. Os elementos fundamentais das filas;
3. Os processos estocásticos;
4. Terminologia — notação;
5. Hipóteses básicas e objetivos;
6. A unidade experimental e a coleta de dados;
7. A construção do modelo;
8. Respostas obtidas e validação do modelo;
9. A determinação de S ótimo;
10. Outros fatores importantes;
11. Conclusões.

Luiz Ricardo Amidani**

* Resumo e adaptação da tese de Mestrado com o mesmo título, já aprovada pela EAESP/FGV. O autor dedica o artigo a Nair e Gema Amidani, suas tias, pelo muito que lhes deve.

** Ex-professor da EAESP/FGV, Departamento de Métodos Quantitativos. Mestrando pela EAESP/FGV. Assistente técnico da Divisão de Planejamento (DEPAD/DIPLA) do Banco do Brasil S.A. e professor do CIPAD — Curso Intensivo para Administradores, do mesmo banco, na Direção Geral — Brasília (DF). Economista e licenciado em matemática.

1. INTRODUÇÃO

A pesquisa sobre o problema das filas diante dos caixas é um assunto bastante oportuno, já que a literatura bancária nada diz a respeito. No geral, existe atualmente uma vasta bibliografia sobre a matéria, porém “a teoria das filas, como instrumental para análise de problemas práticos, permanece em seu estado primitivo”(4).

A matéria-prima da empresa bancária é o próprio dinheiro; mas a clientela considera importante a qualidade do atendimento, quando examina os pontos para escolher um banco que centralize suas operações financeiras. Supondo-se que o capital esteja disponível — exceção feita quando ocorrem graves crises — um dos termômetros mais úteis para análise da qualidade dos serviços é o atendimento pelos caixas, pois o cliente tende a julgá-la pelas filas que encontra.

Logo, qualquer banco deveria estar disposto a evitar que seus clientes esperassem em fila, transformando tal fato em indicador de bons serviços, e conquistando mercado face à satisfação da clientela. Diante de certas restrições (prédio, bateria de caixas, tamanho e potencial da praça) e dos custos (ociosidade do serviço e espera do cliente), deve a agência tentar estabelecer critérios de escolha de alternativas que visem: a) encontrar o número ótimo de pontos de atendimento (caixas); b) estabelecer medidas de eficiência e/ou desempenho.

2. OS ELEMENTOS FUNDAMENTAIS DAS FILAS

“Fila é qualquer agregado de sujeitos (no caso, clientes) que espera a função de um serviço (atendimento, pelo caixa)” (2). “A formação da fila ocorre quando a demanda corrente de clientes excede à oferta corrente de serviços” (8). Mesmo que a fila não siga a forma geral — um cliente atrás de outro e se apresente como um aglomerado frente ao ponto de serviço, ainda assim é uma fila, se houver o pressuposto de uma ordem de atendimento.

É necessário conhecer os quatro elementos básicos do processo de filas (1), (3):

2.1 Chegadas — o exame das chegadas deve definir

O padrão estatístico de chegadas, isto é, a taxa média de chegadas por unidades de tempo (λ); a distribuição de probabilidade que melhor se ajusta à distribuição de chegadas; se as chegadas têm probabilidade estacionária, isto é, se a probabilidade de ocorrência de uma chegada no instante t deixa de depender do estado inicial do sistema, após certo tempo de funcionamento;¹ e o tipo de chegadas que, em nosso caso, são aleatórias.

2.2 Serviços — a investigação de serviços deve encontrar

O padrão estatístico da duração de serviços, ou seja, a taxa média de atendimento traduzido pelo número de clientes atendidos na unidade de tempo (μ); a distribuição de probabilidade à qual melhor se ajusta a distribuição de tempo de serviço; se o tempo de serviço tem

distribuição de probabilidade estacionária;² a disponibilidade dos serviços; a capacidade do sistema, isto é, o número de clientes que podem estar simultaneamente no sistema; a eficiência do serviço, geralmente medida pela distribuição do tempo de espera no sistema; e o tipo de durações do serviço, as quais, em nosso caso, são aleatórias.

2.3 A disciplina da fila

Interessa-nos o caso de canais múltiplos paralelos. Os regimes mais comuns são: a) primeiro a chegar, primeiro a ser atendido (FIFO); b) último a chegar, primeiro a ser atendido (LIFO); c) em ordem aleatória (SIRO); d) com prioridade: atendimento obedecendo a uma escala de preferência; e) com manobra (*jockeying*): é facultado ao cliente mudar de fila; f) fila única: uma só alimenta o sistema.

Interessam-nos dois dos regimes: FIFO e com manobra.

2.4 Canais

Devem ser analisados o número e o tipo de canais (paralelos, seriados, singulares). Está claro que nos interessa o caso de canais paralelos, e otimizar seu número é justamente nosso objetivo.

3. OS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

O caráter aleatório dos fenômenos das filas de espera indica, como principal instrumento de investigação, o cálculo de probabilidade (2). É importante conhecer o comportamento teórico de chegadas e saídas, e as distribuições adequadas para tratar estes eventos no sistema em exame.

Tanto para as chegadas, como para o tempo de serviço, pode-se pensar numa seqüência de intervalos aleatórios definidos por chegadas ou saídas; a sucessão desses intervalos vai nos dizer qual a distribuição de probabilidade para estas variáveis. Definindo a variável aleatória,

x = número de sucessos n que ocorrem em um intervalo de tempo Δt

$P_n(t)$ = probabilidade de ocorrer n sucesso no intervalo t
sucesso = ocorrer uma chegada ou uma saída,
deve-se observar os três seguintes postulados:

1. Para qualquer valor de x_0 e o tempo decorrido desde o instante inicial t_0 , existe a mesma probabilidade de ocorrer um sucesso em um mesmo intervalo de tempo Δt ; isto é, $P_n(t)$ não depende do tempo já transcorrido, nem do número de sucessos havidos.

2. A probabilidade de ocorrer mais de um sucesso em um mesmo intervalo de tempo infinitesimal, Δt , tende a zero.

3. A probabilidade de ocorrer um sucesso no intervalo Δt é proporcional ao intervalo, isto é, $P_1(\Delta t) = \alpha \cdot \Delta t$

Verifica-se que estão garantidas três condições básicas: independência, estado estacionário e aleatoriedade. Pode-se resumir no seguinte:

a) os intervalos ocorrem aleatoriamente; b) os sucessos são independentes entre si; c) não ocorrem dois sucessos

ao mesmo tempo; d) a taxa média de sucessos não varia com o tempo.

Dada a ocorrência destas condições — e pode-se perfeitamente verificar que, no processo de filas de caixa, elas estão inteiramente presentes quando se divide o período de trabalho em horas e se estabelece as taxas médias de chegada e serviço para cada hora — a teoria demonstra que a distribuição de chegadas ajusta-se a uma distribuição Poisson, com função-densidade.

$$P(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

com média e variância λ , e o tempo de serviço se ajusta a uma distribuição exponencial, $F'(t) = \mu e^{-\mu t}$ com média $1/\mu$ e variância $1/\mu^2$.

4. TERMINOLOGIA — NOTAÇÃO

λ = taxa média de chegadas de clientes, por unidade de tempo, ao sistema

μ = taxa média de atendimento de um canal, por unidade de tempo; se \bar{t}_s é o tempo médio de serviço então $\mu = 1/\bar{t}_s$

S = número de canais ou serviços paralelos no sistema

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ = fator de utilização para um canal

n = número de clientes que estão no sistema, entre fila e serviço;

\bar{n}_f = número médio de clientes em fila (excluindo o que está em serviço);

\bar{t}_f = tempo médio de espera em fila para um cliente

\bar{t}_s = tempo médio de serviço para um cliente

$\bar{q} = S - \rho =$ número médio de canais ociosos.

5. HIPÓTESES BÁSICAS E OBJETIVOS

5.1 Hipóteses básicas para o modelo

1. Em se tratando de canais paralelos, de igual serviço, o tratamento ideal seria o das "manobras" (*jockeying phenomena*); entretanto, como tal tratamento não se encontra disponível na literatura pesquisada, e é de aplicação excessivamente complexa, admitimos que o regime FIFO possa ser satisfatoriamente aplicado a essa situação.

2. A distribuição de probabilidade das chegadas se ajusta bem a uma distribuição de Poisson.

3. A distribuição de probabilidade de tempo de serviço se ajusta bem a uma distribuição exponencial.

4. Deve existir uma variação sazonal para horas diferentes do mesmo dia, dias diferentes da mesma semana e dias diferentes do mesmo mês, expressa pela variação da taxa de chegadas.

5. Embora deva existir variação entre a taxa de serviços para canais diferentes, em se tratando de serviços rotineiros, pode-se considerá-la negligível, aceitando a taxa de serviço por canal como sensivelmente constante, estabelecendo taxas para períodos de 1 hora.

5.2 Objetivos

Nosso trabalho procura focalizar critérios práticos que facilitem sua aplicação, mesmo por pessoas não muito conhecedoras do assunto. Logo, vamos nos apoiar em pesquisas feitas, e que embasaram nossa tese de Mestrado com o mesmo título. O objetivo primordial é estabelecer padrões para que os executivos possam, com certa confiabilidade, remover os obstáculos grosseiros, endereçando o refinamento aos técnicos da pesquisa operacional. Assim, são objetivos de nosso estudo:

- construir e demonstrar a validade de um modelo de filas;
- estabelecer duas políticas (I e II) para determinação do número ótimo de caixas;
- oferecer sugestões para o tratamento de outros fatores.

6. A UNIDADE EXPERIMENTAL E A COLETA DE DADOS

6.1 A unidade experimental

A agência bancária escolhida para servir de suporte às investigações conta com 180 funcionários e localiza-se em prédio de cinco pavimentos, com boas instalações, mas com uma configuração próxima à tradicional. Possui duas baterias de caixas, e no que importa ao estudo, foi escolhida a bateria do andar térreo, que tem listados a seu cargo os seguintes serviços principais:

depósitos e saques (cheques)
cheques de viagem
restituição do imposto de renda
ordens de pagamento (Orpag)
saques e depósitos do FGTS
carnês do INPS

O atendimento é feito pelo chamado sistema de atendimento direto e integrado, isto é, qualquer caixa está apto a prestar qualquer dos serviços listados para sua bateria, e o cliente resolve seus problemas diretamente com o caixa. O atendimento se processa durante sete horas, de nove às 16 horas, e os caixas estão obrigados a cinco horas de serviço na bateria e três em serviço interno. Este sistema é hoje adotado pela maioria dos grandes bancos, e seus executores denominam-se "caixas executivos" ou "Caixec".

A bateria escolhida tem 15 guichês instalados, podendo funcionar todos simultaneamente, se necessário.

6.2 A coleta de dados

É fácil estabelecer os padrões estatísticos de chegadas e tempo de serviço. Durante diversos dias — digamos, 15 dias — nos mesmos horários durante o expediente, o observador registra o número de clientes que chegam ao sistema em cada período de uma hora; e dividindo o número de clientes pelo tempo em minutos, obtém a taxa média de chegadas por minuto, para aquela hora. Suponha, por exemplo, que em três dias, no período de 10-11 horas, foram colhidos os dados:

Primeiro dia — 195 chegadas, em 60 min
segundo dia — 186 chegadas, em 60 min

terceiro dia — 131 chegadas, em 40 min
total — 512 chegadas, em 160 min
512 chegadas/160 min
= 3,2 clientes/min =
= λ para o período

A taxa de serviços obtém-se com a colaboração dos Caixec. Durante os mesmos 15 dias, em que o observador colhe dados sobre as chegadas, pede-se a um grupo de caixas que anote, para cada intervalo de uma hora, quantos clientes atende cada um, tendo o cuidado de registrar o tempo que esteve ocioso, isto é, em que não compareceram clientes ao seu guichê. Não é necessário tomar observações para a hora toda: o importante é registrar realmente o número de atendimentos e o tempo em que esteve atendendo. É interessante diversificar o grupo, trocando caixas para dias ou períodos diferentes. Pode-se construir um mapa para este serviço, que os Caixec preencherão. Após a coleta dos dados, para cada período horário somam-se tempo de trabalho e número de atendimentos, e dividindo-se a primeira soma pela segunda, obtém-se o \bar{t}_s , o tempo médio de atendimento para um cliente. Por exemplo, em três dias no período de 10-11 horas, foram obtidos os seguintes dados por dois caixas:

Caixec	dia	atendimentos	minutos de trabalho
A	1.º	26	50
	2.º	29	59
	3.º	14	29
B	1.º	12	26
	2.º	26	45
	3.º	24	42
Total		131	251

$$\bar{t}_s = \frac{251}{131} = 1,916 \text{ min}$$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_s} = \frac{1}{1,916}$$

$\mu = 0,526$ clientes/min, que é a taxa de serviços para o período considerado

Com $\lambda = 3,2$ calculado anteriormente e $\mu = 0,526$, tem-se, para o período de 10-11 horas, $q = 3,2/0,526 \rightarrow q = 6,08$ (veja item 7.6).

É importante informar aos caixas dos motivos da pesquisa, para minimizar a influência de variáveis psicológicas: por exemplo, o receio de que seu padrão de produção possa estar em dúvida, pode acarretar distorção considerável para as observações.

7. A CONSTRUÇÃO DO MODELO

Calcados na teoria de apoio, estabelecemos as hipóteses para o modelo conforme o item 5.1, que indica a expectativa de uma distribuição de Poisson para chegadas, uma distribuição exponencial para o tempo de serviço e um regime de fila FIFO. Procuramos então obter confirmação para estas hipóteses.

7.1 A distribuição de chegadas

Utilizando um mapa foram colhidos dois grupos de observações iniciais, em dias diferentes, um grupo em cada dia, e submetidos à prova do χ^2 . Ambos os grupos, constituídos de amostras razoáveis, forneceram boas respostas à prova, levando à conclusão que realmente a distribuição de chegadas segue uma Poisson. Procedemos então à coleta de grande número de observações (chegadas), em diversos dias, do mês e da semana, em diferentes horários. A resposta foi $\lambda = 3,8052$ clientes/min e teste de χ^2 permitiu a aceitação da hipótese do processo de Poisson para chegadas, ao nível $\alpha = 0,001$. Enquanto os dois testes iniciais deram resultados excelentes, a terceira amostra, com maior número de elementos, revelou um ajuste muito apertado. Após algum raciocínio, chegamos à conclusão de que o enfraquecimento do modelo devia-se à sazonalidade, hipótese que foi se confirmando no decorrer da pesquisa, conforme veremos. Realmente, as restrições para uma Poisson estavam satisfeitas, com exceção da necessidade do padrão estacionário. Verificamos que a taxa de chegadas se modificava bastante para horas diferentes do mesmo dia, mas era razoavelmente constante para o mesmo horário, em diversos dias. Para contornar o problema, decidimo-nos pela investigação, análise e conclusão para cada período de uma hora, e esta foi uma feliz decisão, pois que, a partir daí, como veremos nos testes de validade, as conclusões ficaram bem próximas das expectativas; tal providência garantiu razoavelmente a existência do padrão-estacionário por hora, eliminando as distorções causadas pela sazonalidade.

7.2 A distribuição do tempo de serviço

Verificadas as três condições para existir uma Poisson para chegadas, e enquanto permanecerem válidas, a distribuição da duração do tempo de serviço provavelmente será exponencial ou uma distribuição gama particular.

Usando um outro mapa, colhemos dados para avaliar a taxa média de serviços. Foram feitos dois testes: um para verificar se havia variação muito grande na taxa de serviço, de canal para canal, e outro, para verificar o ajuste do tempo de serviço à exponencial, em amostra inicial. O primeiro teste revelou que, investigados cinco caixas, as taxas médias de atendimento não eram muito diferentes; quatro delas variavam entre 0,47 e 0,55 clientes/minuto, e uma só se revelou mais alta; 0,61 clientes/minuto. O segundo teste, com uma amostra prévia, forneceu $\mu = 0,519$ clientes/minuto, e mostrou bom ajuste do tempo de serviço à distribuição exponencial. Procedemos então à coleta de grande número de dados que forneceram $\mu = 0,5557$ clientes/minuto, e novamente o ajuste pelo teste de χ^2 foi satisfatório. Entretanto, preocupados com a sazonalidade para diferentes horas de um dia, passamos às investigações conforme o fizemos para a taxa de chegada, determinando as taxas médias de serviço para períodos de uma hora, reduzindo assim a influência da sazonalidade.

7.3 A disciplina da fila

O regime FIFO para canais múltiplos paralelos presuppõe uma fila única alimentando os pontos de serviço; ao vagar um canal, o primeiro da fila se desloca para ele. Mas nosso estudo envolve canais com filas paralelas com manobra, o que evidentemente não garante o regime FIFO, isto é, um cliente que chegar primeiro que outro, pode não ser atendido primeiro, dependendo da fila que escolha. O cliente é livre para mudar de fila e aqui duas referências nos ajudam: a) segundo Lee (3) a manobra agiliza o atendimento; em seu estudo sobre recepção de passageiros em um aeroporto, uma das soluções foi abrir portas no saguão para permitir maior manobra; b) segundo Cox (1) os efeitos de fila única ou de várias com manobra são idênticos; se a manobra não é permitida, o sistema com o segundo regime é menos eficiente.

Assim, na impossibilidade de tratar o regime como sendo de manobra, por falta de instrumental adequado, aceitamos o regime FIFO; afinal, o cliente tem a esperança de ser atendido antes de outro que chegue depois e é um regime adequado para uma mesma fila; só não o é, inteiramente, para o sistema como um todo.

7.4 Número de canais

Temos uma bateria com 15 guichês, e possibilidade de alocar até 15 caixas se necessário, e o problema é determinar quantos alocar, dentre os 15. Assim, trabalhamos com um campo variável para S , discreto, definido por $q < S \leq 15$, levando em conta que o q limita o número de canais, pois para $S \leq q$, a fila cresce sem limite.

7.5 Definição do modelo

Afinal, temos nosso modelo. As filas frente aos caixas têm uma distribuição de chegadas de Poisson, e o tempo de serviço segue uma exponencial. O regime de filas mais adequado é FIFO, e o número de canais é variável no dia, devendo ser fixado por períodos de uma hora. O padrão é (tende para) estacionário para estes intervalos (uma hora), o que torna a sazonalidade negligível.

7.6 Formulação adequada

Introduziremos, aqui, alguns conceitos operacionais e fórmulas para cálculos sem contudo deduzi-las: endereçamos o leitor interessado para as referências bibliográficas ao fim do texto. O conceito mais importante é o do "fator de utilização", q , expresso por $q = \lambda/\mu$, que dá a taxa de utilização de cada canal, onde λ é a taxa média de chegadas de clientes no sistema, e μ é taxa média de serviços para um canal, supondo que todos tenham igual taxa de atendimento. Todo o desenvolvimento da teoria das filas está baseado na determinação de q e de P_0 , que é a probabilidade de que não haja clientes no sistema, e é expresso por:

$$P_0 = \left[\frac{e^S}{\bar{q}(S-1)!} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{e^n}{n!} \right]^{-1}$$

onde $\bar{q} = S - q =$ número médio de canais ociosos;

n = número de clientes no sistema entre fila e serviço;
 S = número de canais (caixas abertos);

Outras fórmulas importantes são:
número médio de clientes em fila:

$$\bar{n}_f = P_0 \cdot \frac{\rho^{S+1}}{\rho^2(S-1)!}$$

número médio de clientes sendo servidos: $\bar{n}_s = \rho$
número médio de clientes no sistema: $\bar{n} = \bar{n}_f + \bar{n}_s$

tempo total médio de espera de um cliente:

$$\bar{t}_e = \frac{\bar{n}}{\lambda}$$

tempo médio de fila para um cliente:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda}$$

tempo médio de serviço para um cliente:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu}$$

8. RESPOSTAS OBTIDAS E VALIDAÇÃO DO MODELO

Com uma formulação mais detalhada, e um programa de computador, obtivemos os valores de P_0 , \bar{q} , \bar{t}_f e \bar{n}_f , em função de λ e μ fornecidos, para o número de canais S , tal que $\rho < S \leq 15$. Entretanto, isto não é absolutamente necessário para um emprego rotineiro; na verdade, necessita-se somente da determinação de λ e μ , através das observações por hora, em diversos dias, e do cálculo do tempo médio de fila, \bar{t}_f , o que pode ser feito com a tabela 1 que é mostrada mais adiante. Com os parâmetros determinados pelas observações, em períodos de uma hora (λ e μ), o fator de utilização ρ , e calculando, pelas observações, \bar{q} , \bar{t}_f e \bar{n}_f , pudemos compará-los com os resultados do computador, para os valores de S , obtendo as "respostas" conforme o modelo.

Para validar o modelo, imaginamos dois testes. O teste 1 compara os valores observados e esperados de \bar{t}_f e o teste 2 compara valores observados e esperados de \bar{n}_f e

Quadro 1

Teste de validade do modelo

Teste 1 — compara os valores observados e esperados de t_f

Data	Período (horas)	Dados observados (coleta)							Calculados pelo computador					Justificativas (14)	Comparação dos t_f e conclusões (15)	
		λ (obs) (1)	μ (obs) (2)	ρ λ/μ (3)	\bar{S} (prev) (4)	\bar{S} (obs) (5)	\bar{S} (ajs) (6)	\bar{t}_f (obs) (7)	λ (8)	μ (9)	ρ (10)	\bar{S} (11)	\bar{t} (12)			\bar{t}_f (ajs) (13)
5/08 2.ª f	13-14	4,1	0,52	7,89	8,5	8,69	9	1,720	4,0	0,5	8,0000	9	1,3066	—	—	aceitável
	14-15	4,8	0,53	9,05	12,5	9,68	10	1,099	4,5	0,5	9,0000	10	1,3373	1,2537	(1)	boa
	15-16	5,5	0,55	10,00	14,0	10,60	11	0,770	6,0	0,6	10,0000	11	1,1367	1,2400	(2)	aceitável
6/08 3.ª f	10-11	3,4	0,58	5,86	11,0	6,5	7	1,252	3,0	0,5	6,0000	7	1,2276	1,0820	(3)	aceitável
	13-14 14-15 15-16	4,8	0,64	7,50	8,5	8,6	9	0,788	3,5	0,6	5,8333	7	0,8009	0,8530	(4)	boa
		3,3	0,60	5,50	12,5	8,2	8	0,516	3,5	0,6	5,8333	8	0,2424	0,2570	(5)	discrepante
		4,8	*0,71	6,76	14,0	12,0	12	0,244	4,0	0,7	5,7142	8	0,1826	0,2210	(6)	discrepante
		4,0	0,6	6,6666	12	0,0134	0,0112									

Explicação para ajuste do t_f

Das fórmulas, tem-se:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f}{\lambda}, \text{ onde:}$$

$$\bar{n}_f = \frac{\rho^{S+1}}{(S-1)!(S-\rho)^2} \cdot P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\rho^S + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{(S-1)!(S-\rho)^n}}$$

Logo, $\bar{n}_f = f(S, \rho)$ e $\bar{t}_f = \phi(S, \rho, \lambda)$

Calculou-se:

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{n}_f \text{ (lido)}}{\lambda \text{ (obs)}} \text{ (ajuste)}$$

quando os cálculos feitos pelo computador não abrangiam valores próximos de λ e μ obs; nesses casos, tomou-se o ρ mais próximo do observado e o correspondente \bar{n}_f .

JUSTIFICATIVAS (Coluna 14)

$$(1) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{6,0179}{4,8} = 1,2537 = \bar{t}_f$$

$$(2) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{6,8204}{5,5} = 1,2400 = \bar{t}_f$$

$$(3) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{3,6829}{3,4} = 1,0820 = \bar{t}_f$$

(veja seguinte \bar{n}_f)

$$(3) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{2,8032}{3,4} = 0,8530 = \bar{t}_f$$

$$(4) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{2,5460}{4,8} = 0,5300 = \bar{t}_f$$

$$(5) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{0,8486}{3,3} = 0,2570 = \bar{t}_f$$

$$\frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{0,7305}{3,3} = 0,2210 = \bar{t}_f$$

$$(6) \frac{\bar{n}_f}{\lambda} = \frac{0,0537}{4,8} = 0,0112 = \bar{t}_f$$

Estes resultados estão registrados na coluna (13), \bar{t}_f (ajust).

Indicações:

(obs): observado (prev): previsto (no caso de \bar{S} , conforme está no quadro 1)

(ajs): ajustado (no caso de \bar{S} , para número inteiro mais próximo — variável discreta; no caso de t_f , ver "Explicação")

Nos dados observados constam colunas para S , com o fito de:

(4): S (prev): dar uma referência do número de canais esperado.

(6): S (ajs): mostrar o ajuste feito, para o inteiro mais próximo.

*0,71 — durante toda a pesquisa, nunca apareceu um valor tão alto; não obstante tenham sido os cálculos exaustivamente revisados, confirmou-se esse valor.

\bar{q} . Voltamos a coletar um bom número de chegadas e tempo de serviço, em diversos dias e diversos horários, calculando os parâmetros λ , μ , ρ , \bar{q} , \bar{t}_f , \bar{n}_f e \bar{S} conforme cada teste e, em seguida, os comparamos com os valores esperados, calculados pelo computador, para os mesmos λ , μ , ρ e S . Os testes revelaram um comportamento muito bom do modelo, e que é adequado para a maioria

dos casos. Naturalmente, certos casos particulares, como dias de picos (*peak's days*) ou expediente antes de e após feriados, devem merecer tratamento especial. Os testes estão descritos nos quadros 1 e 2, e um exame rápido é suficiente para se perceber como registramos as comparações.

Quadro 2

Teste de validade do modelo

Teste 2 — compara os valores esperados e observados de \bar{n}_f e \bar{q}

Data	Período (horas)	Dados observados (coleta)								Comparação de π e \bar{q}							$\left(\frac{\bar{n}_f(\text{obs})}{\bar{n}_f(\text{calc})} - 1\right)\%$ (18)		
		λ (obs) (1)	μ (obs) (2)	ρ λ/μ (3)	\bar{S} (prev) (4)	\bar{S} (obs) (5)	\bar{S} (ajs) (6)	\bar{Q} (obs) (7)	\bar{n}_f (obs) (8)	ρ (**) (9)	S (10)	Q (11)	\bar{n}_f (12)	\bar{n}_f (13)	\bar{q} (14)	λ (15)		μ (16)	ρ (17)
20/8	9-10	3,77	0,55	6,85	12,0	10,46	10	3,727	0,350	6,8475	10	4,1525	0,4218	a	a	mb	b	mb	-17,0%
	10-11	3,52	0,54	6,52	11,0	10,33	10	5,200	0,313	6,5000	10	3,5000	0,2856	b	d	mb	b	mb	+9,9%
3. ^a f	11-12	1,76	0,55	3,20	7,0	6,25	6	3,214	0,171	3,3333	6	2,6667	0,1797	mb	a	a*	b	b	-4,8%
	10-11	3,13	0,53	5,91	11,0	9,33	9	4,166	0,367	6,0000	9	3,0000	0,3920	mb	d	b	b	b	-6,4%
4. ^a f	11-12	1,86	0,52	3,58	7,0	6,53	7	2,538	0,092	3,5714	7	3,4286	0,0799	a	a	a	b	b	+15,1%
	12-13	2,10	0,55	3,82	5,5	6,83	7	2,166	0,133	3,7500	7	3,2500	0,1129	a	a	a	b	b	+17,8%
5. ^a f	13-14	2,83	0,56	5,05	8,5	6,85	7	2,142	0,629	5,0000	7	2,0000	0,8112	d	mb	a	b	b	-22,4%

Comparação de \bar{n}_f e \bar{q}

d: discrepante
a: aceitável
b: bom
mb: muito bom

Notas

a*: λ é baixo, mas μ é bom; logo, consideramos Q razoável para o período.

Maior discrepância percentual entre $\bar{n}_f(\text{obs})$ e $\bar{n}_f(\text{calc}) = -22,4\%$

(**), coluna (9), ρ

— Como $\bar{n}_f = f(S, Q)$, (ver "explicação" no Teste I), basta comparar com o Q computado mais próximo do observado, independentemente de considerar λ e μ separadamente.

Indicações

— obs: observado
prev: previsto (no caso de \bar{S} , conforme está no quadro 11)
ajs: ajustado (no caso de S , para número inteiro — variável discreta)

Coluna (18)

— As diferenças percentuais fornecem uma idéia das discrepâncias.

Dados observados

— Constam colunas para \bar{S} , com o fito de: (4): \bar{S} (prev): dar uma referência do número de canais esperado.

(6): \bar{S} (ajs): mostrar o ajuste feito, para o inteiro mais próximo.

Pensamos que parte das diferenças havidas (colunas 13 a 18) podem ter origem neste ajuste de \bar{S} , mas não encontramos alternativa que se revelasse mais apropriada, salvo melhor juízo.

(Veja o texto, para esclarecimentos)

8.1 Sazonalidade

A partir da validação, ficou clara a veracidade da hipótese da sazonalidade para diferentes horas de um mesmo dia, bem como, uma razoável semelhança para os q horários, em uma mesma hora de diferentes dias. E ficou patente que a definição do número de canais por hora é a providência mais aceitável. Um acompanhamento mais longo, por certo, levaria os q horários a convergirem para um valor fixo, que seria o fator de utilização daquela hora.

Por outro lado, verifica-se que a taxa média de serviços pode se alterar quando a chegada de clientes é grande: é o que se chama "pressão da fila".

9. A DETERMINAÇÃO DE Sótimo

Buscamos agora determinar o número de S de canais, que seja o mais econômico: $S_{\text{ótimo}}$. Duas políticas serão definidas, a política I, mais sofisticada, que considera os custos do banco e dos clientes a fim de determinar que

para S ocorre custo mínimo; e a política II, mais simples, que fixa um tempo médio de fila para o cliente e, a partir daí, determina o S correspondente ao \bar{t}_f fixado.

9.1 Política I

Inicialmente é necessário obter o custo de um caixa, para compor os elementos da decisão; a seguir, estabelecer um instrumento simples para obter o tempo de espera do cliente e, finalmente, obter o custo dessa espera.

O custo de caixas é casuístico, e muda de banco para banco, conforme suas organizações internas. Ademais, é um custo simples, pois baseia-se no salário do caixa, sua comissão ou função gratificada, gratificação, obrigações sociais, recolhimento para caixas de assistência ou previdência do banco, 13.^o salário, férias, etc. No caso investigado, não consideramos os salários do caixa, mas sua comissão; isto porque o caixa é sempre um funcionário do banco que, ao assumir a caixa, continua a ganhar seu salário mais uma comissão. Isto pode ser

tempo utilizado pelo cliente na espera do serviço. O instrumento para avaliação dessa renda foi um questionário passado entre os clientes, em diversos dias e diversas horas. O resultado está espelhado no quadro 3. As rendas de clientes forneceram $\bar{x} = \text{Cr\$ } 3\,678,87$ e $s = \text{Cr\$ } 3\,526,40$ e um intervalo de confiança: $\text{Cr\$ } 3\,055,69 < \mu < \text{Cr\$ } 4\,302,66$ ao nível de $\alpha = 0,05$. A consideração desse intervalo de confiança é feita somente como subsídio, dado que, como se vê no quadro 3, as rendas não têm distribuição normal, o que concorda com vários estudos em economia.

É necessário agora estabelecer o que seja "custo": como considerar o custo de espera do cliente, em relação ao banco? Três abordagens foram feitas:

A) O S ótimo ocorre para o ponto de mínimo na curva de custo médio total.

Neste custo total, consideramos a soma do custo de ociosidade de caixas com o custo de espera em fila de clientes, ou seja: $\bar{C}_t = \bar{C}_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f + \bar{C}_{Xd} \cdot \bar{q}$, onde: \bar{C}_t = custo médio total

$$\bar{C}_{Ld} = \frac{\bar{C}_{Lm}}{30} = \begin{array}{l} \text{custo médio diário para um cliente;} \\ \text{equivale à sua renda média diária, onde} \\ \bar{C}_{Lm} = \text{custo (=renda) médio mensal} \end{array}$$

$\bar{C}_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f$ = custo médio diário de espera para clientes. Das fórmulas sabemos que $\lambda \cdot \bar{t}_f = \bar{n}_f$; e $\bar{C}_{Ld} \cdot \bar{n}_f$ é o número médio de pessoas que esperam em fila multiplicado pelo seu custo

$$\bar{C}_{Xm} = \text{custo médio mensal para um caixa e } \bar{C}_{Xd} = \frac{\bar{C}_{Xm}}{30} = \text{custo diário}$$

$\bar{C}_{Xd} \cdot \bar{q}$ = produto do custo diário de um caixa pelo número de caixas ociosos no dia, e dá o custo de ociosidade.

Finalmente, investigamos por que considerar essa soma como custo para o banco, onde entra o custo do cliente. Podemos admitir que o banco assuma uma de três atitudes em relação à fila de clientes, baseado em duas variáveis principais:

x_1 = número de bancos em certa praça

x_2 = potencial econômico-financeiro da praça

Se x_1 e x_2 são ambos pequenos, o banco não tem interesse em investir, sem a pressão da concorrência e com baixa expectativa de retorno, e deixa que o cliente tenha maior espera em fila. Se existir relação inversa entre x_1 e x_2 , o banco é obrigado a oferecer menor tempo de espera para obter melhor captação de depósitos, ou para conseguir maior fatia do mercado face ao bom potencial econômico, ou para garantir a sobrevivência da agência, se há muitos concorrentes para um potencial baixo. E se

x_1 e x_2 são grandes, isto é, há vários bancos e bom potencial financeiro, a captação será, em boa parte, função do bom atendimento que, neste caso, o banco será obrigado a dar.

Esta análise é simplista, mas não podemos esquecer que ao banco interessa a boa imagem que possa criar junto ao cliente; isto influi diretamente na captação de recursos, com os quais o banco trabalha, e dos quais depende sua disponibilidade para operar com empréstimos, pois o volume de aplicação e a captação de recursos estão intimamente correlacionados, positivamente. Esta a razão por que parece aceitável incluir o custo de espera do cliente no custo total para o banco.

B) O S ótimo ocorre quando o custo de ter mais caixas ultrapassa o custo de espera do cliente.

Aqui não mais consideramos a ociosidade. Interessa somente o quanto custa ao banco manter S caixas e quando esse custo supera o custo de espera do cliente. Ou seja, comparamos $\bar{C}_{Xd} \cdot S$ com $\bar{C}_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f$.

C) O S ótimo ocorre no ponto em que o custo de ociosidade de caixas é igual ao custo de espera do cliente.

Ou seja, interessa o ponto em que manter caixas ociosos custa igual ou mais que o ponto de espera. Comparamos $\bar{C}_{Xd} \cdot \bar{q}$ com $\bar{C}_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f$.

O mapa 1 traz elementos para as três análises. Conhecidos:

o custo de caixas (Cr\$ 4 189,70 cada caixa)
o tempo médio de espera em fila por cliente (tabela 1)
o custo de espera para o cliente (quadro 3),

podemos preencher o mapa 1, cujas instruções para preenchimento constam em seu próprio corpo, entre colchetes.

Usando o mapa 1, fizemos o estudo n.º 1 (quadro 4), encontrando que S ótimo é 9 e S mínimo é 8. Verificamos nos demais estudos que a decisão mais razoável é geralmente dada pela abordagem A. Em princípio, a decisão final é o S mais freqüente resultante das três abordagens, mas depende da perspicácia do analista em considerar ou não outros fatores.

O mapa 1 é, portanto, um instrumento para tomada de decisão. Conhecidos os parâmetros horários (λ e μ), avaliados em amostra de tamanho razoável e em diversos dias para os mesmos horários, pode-se estabelecer o S ótimo de canais (caixas) para aquele período e, alocados os S em cada hora, qual o número de caixas necessários para o dia, o que indica a dotação do Caixa para a agência analisada.

Estudo n.º	Estudo do número econômico de caixas, por hora				Mapa 1			
Agência: _____	Bateria: _____		Analista: _____					
Dia _____ Semana: _____ mês: _____	Período h [1 hora] h	$\lambda =$ [para o período]	$\mu =$ [para o período]	$\rho = \frac{\lambda}{\mu} =$ [calcular]				
Custo de clientes	$C_{Lm} = \text{Cr\$}$ [custo médio mensal do cliente]	$\Rightarrow \bar{C}_{Ld} = \frac{C_{Lm}}{30} = \text{Cr\$}$ [custo médio diário p/1 cliente]	$\Rightarrow \bar{C}_{Ld} \cdot \lambda = \text{Cr\$}$ [p/col. (6)] (I)					
Custo de caixas	$\bar{C}_{Xm} = \text{Cr\$}$ [custo médio mensal p/1 caixa]	$\Rightarrow \bar{C}_{Xd} = \frac{\bar{C}_{Xm}}{30} = \text{Cr\$}$ [custo médio diário p/1 caixa] (II)	$\bar{C}_t = \bar{C}_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f + \bar{C}_{Xd} \cdot \bar{p}$					
Canais \rightarrow	iniciar por $S_1 = \lceil \rho \rceil$, isto é, o n.º de caixas inicial deve ser maior que ρ							
S	$\bar{C}_{Xd} \cdot S$ (II) · (1) = = (2)	$\bar{p} = S - \rho$ (3)	$\mu \bar{t}_f$ (4)	\bar{t}_f (5) = $\frac{(4)}{\mu}$	$C_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f$ (I) · (5) = = (6)	$\bar{C}_{Xd} \cdot \bar{p}$ (II) · (3) = = (7)	\bar{C}_t (6) + (7) = = (8)	Decisão Sótimo para: (11)
[n.º de caixas, com $\rho < S < n$.º guichês]	[custo de manter S caixas]	[índice de ociosidade = n.º de caixas ociosos]	[valor a ser lido na Tabela 1]	[tempo médio de fila; resulta da divisão de cada valor da coluna (4) por μ]	[custo médio diário de espera para clientes]	[custo da ociosidade]	[custo médio total (primeira abordagem)]	Abordagem A: mínimo $\bar{C}_t =$ valor mínimo na coluna (8): <input type="text" value="S ="/>
								Abordagem B: ponto para o qual valor coluna (2) \approx valor coluna (6): <input type="text" value="S ="/>
								Abordagem C: ponto para o qual valor coluna (7) \approx valor coluna (6): <input type="text" value="S ="/>
								Decisão final <input type="text" value="Sótimo ="/>

Quadro 4

Estudo n.º 1	Estudo do número econômico de caixas, por hora				Mapa 1			
Agência: _____	Bateria: <u>Térreo</u>		Analista: _____					
Dia _____ Semana: <u>3.ª feira</u> mês: <u>20/08</u>	Período <u>9 h — 10 h</u>	$\lambda = 3,80$	$\mu = 0,56$	$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 6,80$				
Custo de clientes	$C_{Lm} = \text{Cr\$ } 3\,678,90$	$\Rightarrow \bar{C}_{Ld} = \frac{C_{Lm}}{30} = \text{Cr\$ } 122,60$	$\Rightarrow \bar{C}_{Ld} \cdot \lambda = \text{Cr\$ } 465,88$ (I)					
Custo de caixas	$\bar{C}_{Xm} = \text{Cr\$ } 4\,189,70$	$\Rightarrow \bar{C}_{Xd} = \frac{\bar{C}_{Xm}}{30} = \text{Cr\$ } 139,70$ (II)	$\bar{C}_t = \bar{C}_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f + \bar{C}_{Xd} \cdot \bar{p}$					
Canais \rightarrow	iniciar por $S_1 = \lceil \rho \rceil = 7 > \rho = 6,80$, isto é, o n.º de caixas inicial deve ser maior que ρ							
S	$\bar{C}_{Xd} \cdot S$ (II) · (1) = = (2)	$\bar{p} = S - \rho$ (3)	$\mu \bar{t}_f$ (4)	\bar{t}_f (5) = $\frac{(4)}{\mu}$	$C_{Ld} \cdot \lambda \cdot \bar{t}_f$ (I) · (5) = = (6)	$\bar{C}_{Xd} \cdot \bar{p}$ (II) · (3) = = (7)	\bar{C}_t (6) + (7) = = (8)	Decisão Sótimo para: (11)
7	977,90	0,20	3,000	5,357	2.495,70	27,90	2.523,60	Abordagem A: mínimo $\bar{C}_t =$ valor mínimo na coluna (8): <input type="text" value="S = 9"/>
8	1.117,60	1,20	0,500	0,893	416,00	167,60	583,60	Abordagem B: ponto para o qual valor coluna (2) \approx valor coluna (6): <input type="text" value="S = 8"/>
9	1.257,30	2,20	0,170	0,304	141,60	307,30	448,90	
10	1.397,00	3,20	0,066	0,118	55,00	447,00	502,00	Abordagem C: ponto para o qual valor coluna (7) \approx valor coluna (6): <input type="text" value="S = 9"/>
11	1.536,70	4,20	0,024	0,043	20,00	586,70	606,70	
12	1.676,40	5,20	0,012	0,021	9,80	726,40	736,20	Decisão final <input type="text" value="Sótimo = 9"/>

Recalculando os dados coletados, e efetuando estudos semelhantes ao estudo 1, por hora, encontramos uma distribuição dos Caixec por hora; e comparando com o horário programado pela agência, tem-se:

Quadro 5

Período (horas)	λ	μ	ρ	Número de caixas		
				Previsão da agência (média)	$S_{\text{mínimo}}$	$S_{\text{ótimo}}$
9-10	4,0909	0,5782	7,0752	12,0	8	10
10-11	3,1551	0,5409	5,8331	10,5	7	8
11-12	2,0112	0,5180	3,8826	7,0	5	6
12-13	2,2325	0,5212	4,2886	5,5	5	6
13-14	3,1438	0,5565	5,6496	8,5	7	8
14-15	5,0633	0,5431	9,3230	12,5	11	12
15-16	5,6859	0,5672	10,0245	14,0	12	13
Σ Caixec				70,0	55	63
Dotação = $\frac{\Sigma \text{Caixec}}{5}$ *				14,0	11,0	12,6

* Resultado da divisão por cinco horas de atendimento.

Portanto, 13 Caixec são suficientes para suportar o movimento, não obstante a agência esteja utilizando 14. Admitimos, entretanto, as seguintes considerações:

1. Não previmos providências para os dias de picos e para a provável diferença de movimento entre dias diferentes da mesma semana (por exemplo, segunda e quarta-feira).

2. A taxa de serviços da agência é boa, superior à prevista pelo banco; o valor de μ gira entre 0,5 e 0,6, atendendo aproximadamente 0,55 clientes por minuto, enquanto o critério do banco é exigir 0,4 autenticações por minuto (120 autenticações no período diário de cinco horas).

3. Confirmação desse fato é a declaração dos clientes, conforme o quadro 3, em relação às filas: 92,8% afirmam não encontrá-las ou encontrar filas curtas.

Quadro 6

Agência											$t_c = 1$ min
Período (horas)	ρ p/hora	μ p/hora	μt_c	S calculado pela tabela 1	Escolha de S , conforme $\bar{t}_f(S_i > \rho)$					Prob. em % de esperar mais de 1 min $P(T > 1)\%$	
					$S < S_{\text{calc}}$	$\bar{t}_f = k/\mu$ p/ S_1	$S_2 > S_{\text{calc}}$	$\bar{t}_f = k/\mu$ p/ S_2	S_{fixado} S_{fix}		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	
9-10	7,07	0,5782	0,5782	8,1	8	1,124	9	0,346	8	35,4%	
10-11	5,83	0,5409	0,5409	7,0	6	9,244	8	0,314	7	33,8%	
11-12	3,88	0,5180	0,5180	4,9	4	9,266	5	0,985	5	32,0%	
12-13	4,29	0,5212	0,5212	5,4	5	1,919	6	0,441	6	14,6%	
13-14	5,65	0,5565	0,5565	6,7	6	5,391	7	0,719	7	25,5%	
14-15	9,23	0,5431	0,5431	10,3	10	2,025	11	0,534	11	19,6%	
15-16	10,02	0,5672	0,5672	11,2	11	1,234	12	0,388	12	14,2%	
Σ =				53,6	Σ Caixec = 56						
$\frac{\Sigma \text{Caixec}}{5} = \frac{56}{5} = 11,2 \Rightarrow \text{Dotação} = 12 \text{ Caixec}$											

Se os estudos confirmarem a previsão da agência, isto não os torna inúteis; pelo contrário, saber-se-á que a previsão é boa, o que é uma informação bastante valiosa.

9.2 Política II

No sentido de facilitar a aplicação da teoria das filas, pode-se pensar em *fixar* tempos médios de filas. As variáveis x_1 = número de agências concorrentes na praça e x_2 = potencial econômico da praça, consideradas a aplicação e a captação, definidas para a política de custos, podem ajudar a administração da agência a orientar-se no sentido de fixar um tempo médio de fila, que chamaremos tempo crítico, t_c . A administração local, levando em conta x_1 e x_2 e pela observação de filas em outros bancos, fixará um t_c de 1, 2, etc. minutos, considerado compatível com o movimento bancário da praça. Fixado o t_c e obtidos λ , μ e ρ horários, o número de caixas S será estabelecido usando a tabela 1, construindo-se um quadro, com os seguintes procedimentos:

- toma-se para cada hora, o produto μt_c , que será localizado no eixo vertical da tabela 1 (isto é, $\mu t_c = \mu \bar{t}_f$);
- localizado o ponto correspondente a μt_c , procura-se a interseção da linha horizontal que passa por μt_c com a curva de ρ calculado para aquele horário;
- descendo a vertical pelo ponto de interseção, encontra-se o S correspondente, no eixo horizontal;
- procede-se como em a, b, e c para as sete horas de atendimento.

Como teste, efetuamos esta análise para a agência pesquisada; os resultados encontrados estão na tabela a seguir (quadro 6) e as explicações vêm a seguir. O t_c fixado foi de 1min.

Conhecidos λ , μ e ρ , e estabelecido o t_c , o preenchimento do quadro 6 é relativamente fácil. Basta calcular a coluna (4), μt_c , isto é, o produto do tempo médio fixado pela administração da agência, pelo μ horário corres-

pondente a cada período; o resultado é o valor de μt_f a ser procurado na tabela 1, para o q horário correspondente e conseqüente estabelecimento do S para aquele período. As colunas (6) e (8) são aproximações do S estabelecido (S calculado), para o inteiro mais próximo, menor e maior; e as colunas (7) e (9) dão os \bar{t}_f correspondentes a estes números de canais, pela tabela 1, calculando $\bar{t}_f = \frac{k}{\mu}$ onde k é $\mu \bar{t}_f$ (eixo vertical da tabela). O critério aqui adotado foi escolher S_1 quando o \bar{t}_f era menor ou igual a 1,20m (20% a mais de espera, além do t_c) e aceitar S_2 , em caso contrário. Na linha do período 10-11, o S escolhido foi o próprio calculado, pois seu $\bar{t}_f = 1$ min. A coluna (11) dá a probabilidade de o tempo de espera na fila ser maior que o t_c , no caso, 1min, e é dada pela fórmula:

$$P(T > t_c) = \mu \cdot \bar{t}_f \cdot \bar{q} \cdot e^{-\mu \bar{q}}$$

onde: $\bar{q} = S - q$, μ é o do período, \bar{t}_f é calculado por $\bar{t}_f = \frac{k}{\mu}$, $k = \mu \bar{t}_f$ da tabela 1, e o seu cálculo é simples, dispondo de uma tabela de e^{-x} que é muito conhecida. Note-se que, não obstante os \bar{t}_f para os S_{fix} serem geralmente menores que 1min, ainda assim as probabilidades de se esperar mais que 1min são no mínimo de 14,2% e no máximo de 35,4%, o que não indica folga muito grande para a ociosidade.

9.3 Política para a matriz

Verifica-se que a política II é mais simples de se aplicar, e fornece resultados razoáveis se soubermos dimensionar adequadamente os t_c . A política I forneceu um número de 13 Caiexec, enquanto a política II, fixando $t_c = 1$ min, fornece 12 Caiexec, com folga de 0,8 Caiexec. Entretanto, ambas as políticas são do âmbito de decisão da agência, que não tem autonomia para decidir qual a dotação de caixas; este número é determinado pela sede central do banco. A política de fixação desse número adotada pelo banco pesquisado nos parece muito razoável. Consiste em determinar, para cada caixa, um número mínimo de autenticações diárias de 120. Autenticação é o ato de o caixa registrar, na máquina, o pagamento ou recebimento de um papel. A quantidade de 120 autenticações diárias tem dado bons resultados, ressentindo-se de dois defeitos: a) não indica à agência como programar convenientemente o horário dos caixas, face ao movimento; b) a fixação de padrão de produção, quando exequível, acaba forçando a produção a convergir para aquele padrão. Nossa sugestão para a política da matriz, envolve duas fases: 1.^a inicialmente, a dotação de Caiexec será estabelecida dividindo-se o número de autenticações em seis meses, fornecido pelas agências de per si, pelo produto entre 120 autenticações e o número de dias úteis no semestre; 2.^a as dotações seguintes serão estabelecidas pelo mesmo processo, se o gerente de cada agência, utilizando a política II, não tiver razões suficientemente fortes para sua alteração.

Supondo, por exemplo, que uma agência informe 125 dias úteis e 150 000 autenticações no semestre; o cálculo do número de caixas será:

$$\frac{150\ 000 \text{ autenticações}}{120 \text{ autenticações} \times 125 \text{ dias}} = 10 \text{ caixas/dia}$$

Porém, a agência situa-se em zona de alto índice de crescimento, com muitas agências bancárias que ten-

dem a crescer. O gerente, após observação do atendimento pelos demais bancos, e análise de seu movimento pela política II, conclui que deve reduzir seu tempo crítico, que é de 1,5min para 1min, para o que precisa de 12 caixas. Exporá suas razões à matriz, e, da análise das duas fases, resultará a nova dotação de Caiexec para a agência.

Outra consideração relevante é como tratar baterias com serviços diferentes. Muitas agências possuem duas ou mais baterias, usualmente divididas em depósitos e cobrança. Enquanto o critério das 120 autenticações é geralmente folgado para a bateria de depósitos, que é mais ágil, é geralmente apertado para a de cobrança, mais vagarosa pela natureza dos serviços. A aplicação da política II permitirá ao gerente alocar números diferentes para as duas baterias, face ao exame dos parâmetros, isto é: se a agência tem 30 caixas, o método pode revelar que devem ser designados 12 para depósitos e 18 para cobrança, o que é da estrita competência da administração da filial.

9.4 A alocação de caixas por hora

Determinados os $S_{ótimos}$ por hora, é preciso montar um quadro com o número de Caiexec em cada hora, considerando o intervalo legal para refeições e os períodos de trabalho do caixa, de cinco horas no atendimento e três horas em serviço interno. O mapa 2 (quadro 7), a seguir, foi construído com os resultados do quadro 6:

Quadro 7

Dia semana: mês:	Programação do número de caixas, por hora								Mapa 2 Somas para teste (horas)
	Horário	Expediente para o público							
Caixas	9	10	11	12	13	14	15	16	
1.									5
2.									5
3.									5
4.									5
5.									5
6.									5
7.									5
8.									5
9.									6
10.									5
11.									5
12.									5
Caixas alocados →	10,5	7,0	5,5	6,0	8,0	11,0	12,0		80
Caixas necessários (quadro 6) →	6	7	5	9	7	11	12		

Período	Frequência n.º autenticações	Frequência acumulada — F_{ac}
9-10	4 365	4 365
10-11	3 891	8 256
11-12	2 152	10 408
12-13	2 258	12 666
13-14	2 968	15 634
14-15	4 877	20 511
15-16	5 743	26 254
	$\Sigma = 26\ 254$	

Pelo exame do quadro 7, vê-se que foram alocados 12 Caiexec. Os 10,5 no início do expediente são boa pro-

vidência, pois às nove horas, na abertura do expediente, há geralmente um grande público aguardando. No período de 12-13 horas, a média de seis Caiexec resulta da alocação de sete e cinco Caiexec, mas esta providência beneficia o horário de 14-15 horas, pois o movimento maior é das 14:30 horas em diante (veja 10.1) e esse período conta com 12 Caiexec.

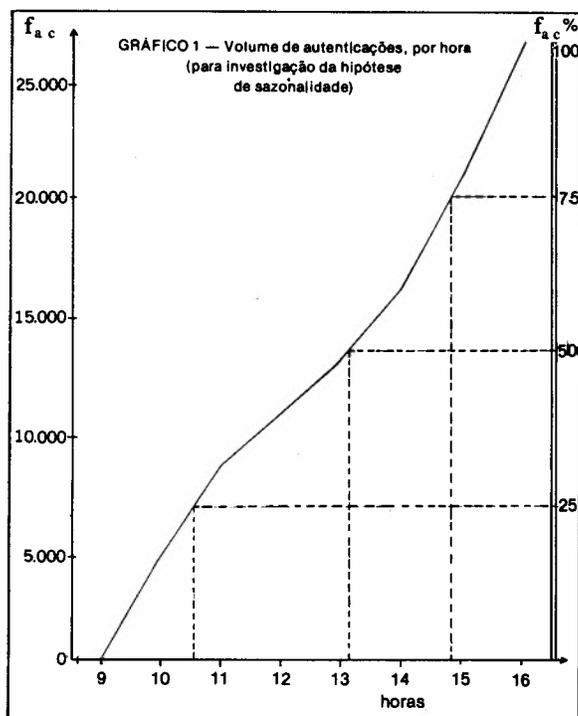
10. OUTROS FATORES IMPORTANTES

Não vamos tratar aqui de outros fatores que nos chamaram a atenção e que investigamos durante a pesquisa. São eles: a) influência da localização do guichê: quanto mais próximo da entrada se localiza o guichê, mais procurado ele é; b) agilização do fator de utilização ρ , pelo aumento na taxa de serviços μ , e suas conseqüências; c) preferência por certos caixas. Preferimos abordar outro fator, procurando dar um instrumental aos administradores, para localizar a concentração do fluxo de chegadas.

10.1 Concentração e sazonalidade

Um dos processos que pode ajudar o administrador a verificar se seu cálculo de S caixas, por período horário, está razoável, é um gráfico da concentração para isto, durante vários dias, ao fim de cada hora, um observador passa pelos caixas e anota o número de autenticações feitas em cada máquina, acumuladamente. Depois, monta-se uma distribuição de freqüências pelo número de autenticações, em cada período horário.

Em seguida, traça-se um gráfico de freqüências acumuladas, como no gráfico 1, com um eixo percentual vertical, à direita; dividindo esse eixo em quatro partes, obtêm-se os níveis de 25%, 50% e 75%, e traçando retas horizontais passando por eles, até a curva de freqüência acumulada, e descendo retas verticais pelos pontos de interseção, obtêm-se os períodos que englobam a concentração de serviços correspondentes a múltiplos de



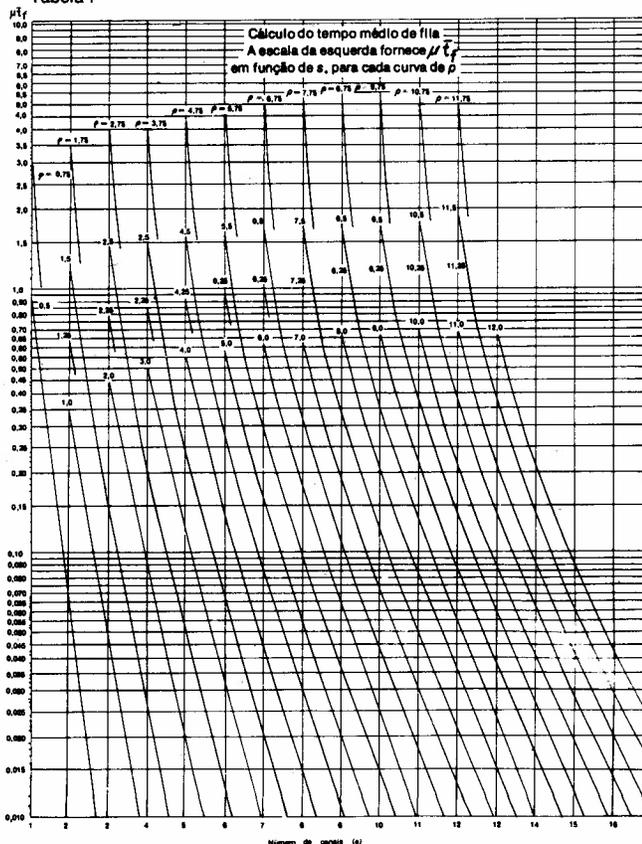
25%, no eixo horizontal. No caso, 25% do movimento ocorre entre 9-10:30; 50% entre 10:30-14:40; e 25% entre 14:40-16 horas, aproximadamente, o que indica grande concentração no início e no fim do expediente, e relativa calma no período de almoço e próximo dele. O período mais calmo é entre 10:30-13:10 horas. Estes resultados referem-se a 13 dias de observação.

11. CONCLUSÕES

O artigo não abrangeu a análise dos dias de picos (*peak's days*), isto é, os dias após feriados, fim de semana, fim de mês, etc., onde o volume de serviços cresce bastante; e não abordou o regime de caixa-reserva, que é um elemento treinado que fica no serviço interno, sendo chamado quando o movimento excede às expectativas.

É claro que não só aos bancos interessa a metodologia exposta: empresas como supermercados, indústrias como linhas de produção, e outras, poderão utilizá-la. E, afinal, se conseguirmos com este artigo indicar aos interessados um caminho para tratar as filas, e alocar um número adequado de pontos de serviço, estaremos satisfeitos em nosso propósito. ■

Tabela 1



¹ A esse respeito, diz Lee (3): "Costuma-se assumir que a distribuição é estacionária, quando isto raramente ocorre; porém, a discrepância entre a teoria e a realidade nem sempre é grave: torna-se mais grave quando a taxa de chegadas é alta." O modo de contornar tal dificuldade é estabelecer uma taxa de chegadas (ou de serviços) por hora, o que, como veremos, isola a influência da sazonalidade e pode permitir a aceitação do padrão estacionário.

² Veja nota 1.

BIBLIOGRAFIA

1. Cox, D. R. & Smith, W. L. *Queues*. London, Methuen & Co. Ltd., 1961.
2. Escudero, Laureano F. *Aplicaciones de la teoría de colas*. Bilbao, España, Ediciones Derroto, 1972.
3. Lee, Alec M. *Applied queueing theory*. New York, St. Martin's, 1966.
4. Newell, G. F. *Applications of queueing theory*. London, Chapman and Hall Ltd., 1971.
5. Torres, O. Fadigas Fontes. Elementos da teoria das filas. *Revista de Administração de Empresas*, Rio, FGV, v. 6, n. 20, set. 1966.
6. Ackoff, R. L. & Sasieni, M. W. *Pesquisa operacional*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1971.
7. Kauffmann, A. & Faure, R. *Introdução à investigação operacional*. Lisboa e São Paulo, Ed. Gleba/Livros Horizonte, 1966.
8. Hiller, R. S. & Lieberman, G. J. *Introduction to operations research*. São Francisco, Holden-Day, Inc., 1967.
9. Amidani, L. R. *A teoria das filas aplicada aos serviços bancários*. Tese de Mestrado junto à EAESP/PFG, exemplar disponível na biblioteca da Escola, 1974.

REEMBOLSO POSTAL

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

A fim de simplificar e tornar mais rápido o envio de pedidos de publicações da Fundação Getúlio Vargas, sugerimos o uso do reembolso postal, que beneficiará principalmente às pessoas residentes em locais afastados dos grandes centros. Assim, na ausência, em sua cidade, de representantes credenciados ou livrarias especializadas, dirija-se diretamente pelo reembolso à

EDITORA DA FGV
PRAIA DE BOTAFOGO 188
CAIXA POSTAL 9052 - ZC-02
RIO DE JANEIRO
RIO DE JANEIRO