

Resolução de Problemas Aritméticos: Efeito de Relações de Equivalência entre Três Diferentes Formas de Apresentação dos Problemas

Arithmetic Problem-Solving: Effect of Equivalence Relations Between Three Different Forms of Presenting Problems

Verônica Bender Haydu*, Lucita Portela da Costa, & Elsa Maria Mendes Pessoa Pullin
Universidade Estadual de Londrina

Resumo

O paradigma da equivalência de estímulos tem sido usado para o desenvolvimento de diversos procedimentos aplicáveis ao ensino de leitura, escrita e aritmética. O objetivo do presente estudo foi o de investigar o efeito do ensino de relações de equivalência entre três formas de apresentação de problemas aritméticos de adição sobre o comportamento de resolver problemas. Sete alunos da 1ª série do ensino fundamental foram submetidos a um pré-teste e pós-teste com problemas de adição impressos nas formas de balança (A), operação (B) e sentença lingüística (C). O treino de equivalência de estímulos estabeleceu relações entre A-B e A-C. Seis dos sete participantes responderam de acordo com as classes estabelecidas. O desempenho dos participantes no pós-teste foi superior ao apresentado no pré-teste. Conclui-se que o estabelecimento de relações de equivalência entre problemas aritméticos de adição em forma de balança, operação e sentença lingüística melhorou o desempenho na resolução problemas desses tipos.

Palavras-chave: Resolução de problemas aritméticos; adição; equivalência de estímulos; discriminação condicional.

Abstract

The equivalence paradigm has been applied to the development of a variety of procedures applied to teach reading, writing and arithmetic. This work aimed to investigate the effect of teaching stimulus equivalence relations between three different forms of arithmetic sum problems on problem-solving behavior. Seven first grade students of Fundamental Schooling (=Elementary Schooling) were submitted to a pre-test, and a post-test with sum problems printed in the form of slave (A), operations (B) and word problems (C). The conditional discrimination procedure established relations between A-B and A-C. Six of seven participants responded accordingly to the established classes. The performance of the participants in the post-test was higher than in the pre-test. It was concluded that the establishment of equivalence relations between arithmetic sum problems in the form of slave, operations, and word problems enhanced the performance of the resolution of those types of problems.

Keywords: Arithmetic problem-solving; addition; stimulus equivalence; conditional discrimination.

O número de estudos sobre o ensino de repertórios matemáticos do ponto de vista da Análise do Comportamento (Carmo, 2002) é bastante reduzido, apesar da relevância que Skinner atribuiu às questões de ensino e aprendizagem (ver Zanotto, 2000), e da ênfase reportada ao tema por educadores e pesquisadores de outras abordagens. Um aspecto em comum a essa produção é o da importância do ensino de conceitos e habilidades matemáticas fundamentais, considerados pré-requisitos para o desenvolvimento de outros repertórios matemáticos, como, por exemplo, o de resolução de problemas.

Segundo Skinner (1984), a resolução de problemas envolve a emissão de comportamentos precorrentes, que

consistem em manipular as variáveis relacionadas ao problema, tornando a solução do mesmo mais provável. Uma situação se caracteriza como sendo um problema quando o indivíduo não tem um comportamento imediatamente disponível que produza a solução. Para ensinar o comportamento de resolver problemas, o professor deve levar o aluno a discriminar as variáveis relevantes da situação problema. Se estas não são apresentadas de maneira a que possam ser discriminadas, o aprendiz deve alterar aquelas variáveis que lhe são acessíveis para que os estímulos que controlam a resposta de resolução fiquem evidentes. Em algumas situações, basta alterar a ordem de apresentação dos estímulos para que a resposta se torne mais provável¹.

Apoio: CNPq (Bolsa produtividade em pesquisa e bolsa de IC)

* Endereço: Departamento de Psicologia Geral e Análise do Comportamento, Cx. Postal 60010, 86051 990, Londrina, PR. haydu@brturbo.com

¹ Apesar de, no presente estudo, o termo "problema" ser conceituado como proposto por Skinner, não é feita uma distinção entre os termos "exercícios" e "problemas", como sugerem Codina e Livera (2001).

A resolução de problemas matemáticos, além de implicar na discriminação das variáveis relevantes da situação, implica, ainda, na aprendizagem de uma linguagem específica, com sintaxe, conceitos e símbolos próprios e, portanto, envolvem discriminações condicionais de relações entre estímulos. Por exemplo, a posição de cada algarismo na escrita de um número determina o valor relativo de cada algarismo. Assim, no caso de problemas aritméticos apresentados na forma de sentença lingüística (*word problems*), o aprendiz, além da capacidade de ler o texto do problema para resolvê-lo, deve ser capaz de relacionar a linguagem materna à linguagem matemática, para discriminar as informações relevantes, identificando a incógnita para, enfim, efetuar as operações matemáticas apropriadas à solução do mesmo.

O processo envolvido na aprendizagem em cada um desses comportamentos tem sido amplamente investigado por pesquisadores das diversas áreas que se dedicam ao estudo da resolução de problemas matemáticos, em especial por pesquisadores da área de Psicologia da Aprendizagem e de Psicologia da Educação Matemática, por exemplo, Carraher, Carraher, e Schlieman (1995), Franchi (1994), Fueyo e Bushell Jr. (1998), Hung (2000), Selva e Brandão (2000) e Selter (2001).

Com destaque a apenas uma das discriminações de estímulos que faz parte da complexa rede de comportamentos de resolver problemas, Hiebert (1982) analisou o padrão de comportamento de alunos de 1ª série na resolução de problemas de adição e subtração, para avaliar se havia diferenças em relação à posição da incógnita (a incógnita pode estar nas posições *a*, *b* ou *c*, dependendo de se a informação que falta é o primeiro operador, o segundo – adendo, ou o resultado). Os resultados mostram que as crianças apresentavam estratégias específicas na resolução desses problemas, quando as incógnitas localizavam-se nas posições *b* e *c*, mas não quando a incógnita era apresentada na posição *a*. As estratégias utilizadas quando a incógnita encontrava-se nas posições *b* e *c* eram as mesmas, porém distintas daquelas utilizadas quando a incógnita estava na posição *a*. O autor concluiu que a complexidade relativa de um problema, para o grupo de participantes que investigou, estava relacionado com a possibilidade de representar o problema por meio de objetos, e esta possibilidade era dependente da ordem das informações. A ordem das informações no enunciado de um protocolo determina, por sua vez, a posição que a incógnita ocupa.

Uma forma de reduzir as dificuldades de resolução geradas pelas diferentes posições da incógnita nos problemas é a de ensinar as estratégias de resolução com base na apresentação dos mesmos em forma de uma balança, conforme proposto por Skemp (1971). Uma balança pode ser real, com possibilidade de ser manuseada, possibilitando

o uso de noções de equilíbrio já aprendidas pela maioria das crianças desde os 5 anos (Jansen & Maas, 2001). A metáfora da balança para a resolução de problemas aritméticos pode, também, ser utilizada sob a forma impressa, ou virtual, com simulação em tela de computador, como nos estudos descritos a seguir.

O modelo da balança² de Skemp (1971) foi aplicado em diversos estudos com escolares de pré-escola e de ensino fundamental, tendo sido demonstrado um aumento no número de respostas corretas na resolução de problemas aritméticos de adição e subtração, e redução na diferença do desempenho em problemas com posições distintas. Capovilla, César, Capovilla, e Haydu (1997) testaram um programa de computador, no qual o usuário deve equilibrar os dois lados de uma gangorra para chegar ao resultado correto dos problemas de adição e subtração propostos. Dois experimentos foram conduzidos. No primeiro foram apresentados nove problemas de adição para cada uma das três posições de incógnita a dois participantes, um aluno de pré-escola e outro de 1ª série do ensino fundamental. Para ambos os participantes, em oposição aos resultados de Hiebert (1982), o melhor desempenho foi obtido nos problemas com a incógnita na posição *a* e o pior com a incógnita na posição *c*. No segundo experimento, participaram sete alunos de 1ª série, aos quais foram apresentados 180 problemas de adição e subtração, com números positivos e negativos, variando a posição da incógnita. Não houve diferença significativa, seja quanto à porcentagem de erro nos problemas de adição em forma de sentença lingüística com incógnitas nas posições *a* e *b*, seja quanto à porcentagem de erro nos problemas de subtração com incógnitas nas posições *c* e *a*. Em que pese as diferenças entre os dois experimentos, os autores concluíram que as estratégias utilizadas para chegar à solução dos problemas apresentados na forma de balança diferem daquelas utilizadas para os apresentados sob a forma de sentença lingüística. O modelo da balança evita as dificuldades produzidas pela formulação em sentença lingüística dos problemas e, possivelmente, daquelas relacionadas à posição da incógnita, como indicado por Hiebert (1982).

Um outro estudo que utilizou o modelo da balança foi desenvolvido por Haydu, Andrade, Silva, Pimentel, e Capovilla (1997), no qual as balanças eram apresentadas sob a forma impressa em cadernos. O objetivo foi o de investigar o efeito da posição da incógnita em problemas de adição e as estratégias de resolução em condições nas quais os participantes eram instruídos a: 1) resolver os problemas em silêncio; 2) cantar – verbalização não-pertinente à resolução; 3) relatar suas ações – verbalização pertinente à resolução, enquanto resolviam os problemas. Participaram desse estudo 33 alunos de 1ª série do ensino fundamental, os quais foram distribuídos em três grupos. Verificou-se que

(cont.) porque não se sabe a priori se os participantes do estudo tinham um comportamento disponível (estratégias ou algoritmo de resolução) que levassem à solução de um exercício/problema específico. Por essa mesma razão e para facilitar a comunicação, o termo “enunciado” não é usado para designar as diferentes formas de apresentação dos exercícios/problemas.

²O uso da forma gráfica de uma balança como metáfora de um problema aritmético, por ter sua origem em Skemp (1971), é identificada neste trabalho, assim como foi feito por Capovilla et al. (1997) e Haydu et al. (1997, 2001), como o “modelo da balança”.

houve diferença significativa entre os grupos quanto ao tempo utilizado para resolver os problemas. Na condição de verbalização não-pertinente, os participantes levaram mais tempo para resolver os problemas e os na condição silenciosa, menos tempo. Quanto ao efeito da posição da incógnita, verificou-se que esta variável não afetou o desempenho, medido tanto pelo tempo gasto na resolução, como pelo número de respostas corretas. Os autores concluíram, assim como no estudo anterior, que o uso do modelo da balança, provavelmente, reduz as dificuldades geradas pela posição da incógnita e que para resolução dos problemas, mesmo quando apresentados graficamente em forma de balança, repertórios lingüísticos são necessários.

Dando continuidade aos estudos com o modelo da balança, Haydu, Mazzo, Isquierdo, Pires, e Batista (2001) utilizaram cadernos com balanças impressas, em um experimento que teve como objetivo comparar, de forma direta, o desempenho de escolares na resolução de problemas de adição sob a forma de operação, sentença lingüística e de balança, nos quais a posição da incógnita foi manipulada. Oitenta e seis alunos da 2ª série do ensino fundamental resolveram os problemas em situação coletiva. Cada participante resolveu 30 problemas de cada tipo (operação, sentença lingüística e balança), variando a posição da incógnita. Verificou-se que, nos problemas em forma de sentença lingüística, o maior índice de acerto ocorreu para a posição de incógnita *c*, mas, nas operações com incógnitas nas posições *a* e *b*, o índice de acerto não foi muito diferente daquele obtido com a incógnita na posição *c*. Nos problemas em forma de balança, os resultados divergem dos dois anteriores, registrando-se o menor índice de acerto quando a incógnita encontrava-se na posição *c*, porém não muito diferente dos obtidos quando ela estava nas posições *a* e *b*. Esses resultados levaram aos autores a concluir que a forma de apresentação dos problemas e a posição da incógnita nos problemas são variáveis que interagem, afetando o desempenho dos participantes. Com base nesses dados, as autoras sugerem que ensinar a resolução de problemas aritméticos na forma de balança, com incógnitas nas três posições, pode ser importante para melhorar o desempenho de alunos que apresentam dificuldades para tal. Além disso, os autores sugerem que, possivelmente, o ensino de relações de equivalência entre problemas apresentados em diferentes formas (mais do que duas) pode contribuir para melhorar o desempenho na resolução daquela forma de problema em que ele apresenta maior dificuldade.

A formação de relações equivalentes tem sido extensamente investigada por analistas do comportamento em estudos experimentais e aplicados. Nos estudos aplicados, verificam-se contribuições significativas ao ensino de leitura e escrita, havendo alguns que demonstraram aplicações ao ensino de matemática (Carmo, Figueiredo, & Silva, 1999; Fueyo & Bushell, 1998; Gast, Vanbiervliet & Spradlin, 1979; Lynch & Cuvo, 1995; Prado & de Rose, 1999; Rossit, 2003; entre outros). O procedimento básico para que um indivíduo passe a responder a relações entre os estímulos consiste em ensinar duas ou mais discriminações condicionais

que possuam um elemento em comum e testar a emergência das propriedades que definem a equivalência de estímulos (simetria, reflexividade e transitividade). Por exemplo, um indivíduo que foi ensinado a apresentar a resposta de escolher um determinado estímulo B1 entre dois estímulos de escolha, B1 e B2, na presença do estímulo A1, o modelo, aprende: "dado A1, escolher B1". Em seguida, ensina-se a selecionar o estímulo C1 de outro conjunto, contendo C1 e C2, dado modelo B1, isto é, "dado B1, escolher C1". Ensina-se também, "dado A2, escolher B2" e "dado B2, escolher C2". Desta forma, são estabelecidas relações condicionais entre A1-B1, B1-C1, A2-B2 e B2-C2.

Após esta seqüência de ensino, que envolve o estabelecimento de relações entre os estímulos A e B, e entre B e C, é provável que o indivíduo selecione, sem a necessidade de um ensino adicional: A1 de um conjunto de comparações, dado B1 como modelo, e B1 dado C1 como modelo; A2 de um conjunto de comparações, dado B2 como modelo, ou B2 dado C2 como modelo. Também é provável que o indivíduo selecione: A1 dado C1 como modelo, e C1 dado A1 como modelo; A2 dado C2 como modelo, e C2 dado A2 como modelo. Além disso, diante de A1 selecionará A1; diante de B1 selecionará B1, e assim por diante. De acordo com Sidman (1986, 2000), isto demonstra a formação de equivalência de estímulos.

Com base na hipótese de que pode haver o estabelecimento de relações de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas aritméticos, e que isso contribui para melhorar o desempenho na resolução dos problemas em forma de sentença lingüística, Haydu, Batista, e Mazzo (2002) desenvolveram um estudo com problemas aritméticos de adição apresentados em forma de balança. Participaram do estudo 20 alunos das 2ª, 3ª e 4ª séries do ensino fundamental que foram indicados pelo professor como tendo dificuldades de resolução de problemas aritméticos. Eles foram distribuídos em dois grupos e ambos foram submetidos a cinco fases: 1) teste de leitura; 2) pré-teste com 45 problemas de adição impressos nas três formas de apresentação dos problemas, com a incógnita variando nas três possíveis posições; 3) treino de equivalência de estímulos, em que foram ensinadas discriminações condicionais entre as três formas de apresentação dos problemas, tendo como estímulo-modelo problemas em forma de balança (para o Grupo 1) ou em forma de operação (para o Grupo 2), seguido pelo teste das relações emergentes; 4) pós-teste com 45 problemas diferentes dos apresentados no pré-teste; 5) teste de acompanhamento, realizado seis meses depois da Fase 4. Somente os dados de nove participantes, que apresentaram mais do que quatro erros no pré-teste, foram submetidos à análise. Do Grupo 1, dois participantes apresentaram aumento no número de respostas corretas no pós-teste. Do Grupo 2, quatro participantes apresentaram aumento no número de respostas corretas. Quanto à posição da incógnita, os menores índices de acerto ocorreram em problemas na forma de sentença lingüística, com a incógnita na posição *b*. Ambos os grupos apresentaram um aumento no número de acertos na maior parte dos problemas e não voltaram a

apresentar dificuldades após o período de 6 meses de intervalo. As autoras concluem que o procedimento de ensino de discriminações condicionais relacionadas, ao levar à emergência de relações de equivalência entre as diferentes formas de apresentação dos problemas pode ter contribuído para que os participantes que tinham alguma dificuldade melhorassem seu desempenho na resolução dos problemas aritméticos. No entanto, os participantes apresentaram porcentagens de acerto relativamente altas no pré-teste (oito dos nove participantes apresentaram 73% de acertos ou mais), o que prejudicou a avaliação do efeito do procedimento de ensino aplicado. Por esse motivo, o mesmo procedimento foi usado no presente estudo, tendo-se selecionado participantes da 1ª série, os quais não haviam tido aulas para o ensino de resolução de problemas aritméticos. O objetivo deste estudo consistiu em investigar se o estabelecimento de relações de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas melhora o desempenho na resolução de problemas do mesmo tipo.

Método

Participantes

Alunos que cursavam a 1ª série do ensino fundamental de uma escola particular da cidade de Londrina, que é conhecida por seu projeto pedagógico diferenciado, no qual os próprios alunos escolhem as atividades a serem desenvolvidas nas aulas. Os alunos que apresentaram índice de acerto no pré-teste inferior a 70% e passaram no teste de leitura, permaneceram no estudo. Foram selecionados, a partir do desempenho no teste de leitura, sete dos nove participantes, com idades entre 6 e 7 anos. Dois participantes não atingiram o critério de acerto exigido nesse teste e, por isso, não foram expostos ao procedimento de treino e aos testes subsequentes.

Materiais e Situação Experimental

A coleta de dados foi realizada em uma sala disponibilizada pela instituição escolar, situada ao lado da sala de aula. Durante toda a coleta, experimentadora e participante permaneceram sentados um ao lado do outro, em banquinhos ao redor de uma mesa redonda.

Cadernos com 45 folhas de 14 x 17cm foram utilizados nas fases de pré-teste e de pós-testes. Cada folha apresentava apenas um problema impresso, o qual podia estar representado na forma de sentenças lingüísticas, sob o formato de balança ou de operação com algarismos.

Pastas-catálogo contendo folhas de papel branco nas quais os problemas estavam impressos sob os diferentes formatos foram utilizadas para o treino de discriminação condicional e testes das relações emergentes. As folhas eram divididas em duas partes iguais. Na superior era apresentado o problema-modelo em forma de balança (A). A parte inferior era subdividida em três partes iguais, contendo as comparações, que podiam ser operações com algarismos (B) ou problemas em forma de sentença lingüística (C). Os problemas envolviam algarismos entre 0 e 10, sendo que o valor máximo do resultado de um problema era 10.

Para o treino preparatório foram usados seis cartões medindo 15 x 17cm com problemas em forma de balança impressos, iguais àqueles usados nos treinos e testes, mas com valores diferentes. Os problemas tinham a incógnita nas três possíveis posições, sendo dois de cada uma.

Procedimento

A autorização para a realização do estudo foi obtida por meio do contato inicial com a direção da instituição de ensino, no qual foram esclarecidos os objetivos e o procedimento da pesquisa. A direção informou que a pesquisa poderia ser realizada somente com o aceite dos alunos. Uma votação foi realizada com a participação de todos os nove alunos da primeira série, que optaram por participar do estudo. Em seguida, a orientadora educacional da instituição fez contato com os pais dos alunos para a entrega e a assinatura do Termo de Consentimento Esclarecido.

As situações de pré-teste, treino e pós-teste foram conduzidas, individualmente, pela mesma experimentadora. Os participantes realizaram: 1º) pré-teste, 2º) treino preparatório, 3º) treino de discriminação condicional, 4º) testes das relações emergentes e 5º) pós-teste.

Pré-teste

Na fase de pré-teste eram apresentados 45 problemas aritméticos de adição, sendo 15 na forma de operações, 15 na forma de sentenças lingüísticas e 15 na forma de balanças. Para cada forma de problema havia cinco com incógnita em cada posição. As respostas apresentadas pelos participantes não eram reforçadas. O registro era realizado pela experimentadora, a qual anotava as respostas do participante numa folha que não podia ser visualizada pelo participante.

Inicialmente, o participante era informado sobre o modelo da balança (o conceito e funcionamento). A experimentadora fornecia as seguintes instruções, mostrando o desenho de uma balança:

Esta é uma balança. Ela tem dois pratos, o Prato A e o Prato B. Em cada prato há algumas bolinhas. Você pode observar que um prato está mais alto que o outro. Para que os dois pratos fiquem na mesma altura (retinha) é necessário que eles tenham a mesma quantidade de bolinhas dos dois lados. Assim, a balança vai ficar equilibrada. Em um dos pratos há um espaço vazio que deve ser preenchido com algumas bolinhas. Lembrando que para ficar retinha, a balança precisa ter o mesmo número de bolinhas dos dois lados, quantas bolinhas você deve colocar no espaço vazio para que a balança fique equilibrada?

Em seguida, a experimentadora ensinava como era o pré-teste, complementando com instruções de como resolver os problemas em forma de operação e de sentença escrita. As instruções eram as seguintes:

Observe no caderno problemas em três diferentes formas: na forma de operação, de sentença e na forma de uma balança, que eu já te expliquei como funciona. Agora, eu

vou explicar um de cada vez, para que você possa resolver todos os problemas. Este problema é uma operação (dizia a experimentadora, apontando para o problema em forma de operação). Como você pode observar, há alguns números e um espaço vazio que está representado pelo quadradinho ($2 + \square = 7$). Para resolver o problema você precisa dizer que número que está faltando no quadradinho.

Para exemplificar, a experimentadora mostrava o problema e perguntava: dois mais quanto é igual a sete?

Posteriormente, a experimentadora mostrava um problema em forma de sentença lingüística e fornecia as seguintes instruções: “Esse problema está em forma de sentença escrita, vou ler para você. Chico Bento tinha três peixes, pescou mais um. Quantos peixes Chico Bento tem agora?”.

Por fim, era solicitado ao participante que resolvesse os problemas subseqüentes, sem que fossem apresentadas conseqüências para cada resolução.

Treino preparatório

A experimentadora apresentava três cartões com problemas em forma de balança, cada um com a incógnita em uma das três diferentes posições. Ela ensinava ao participante como resolver os problemas, destacando a variação na posição da incógnita com a seguinte instrução:

Você já sabe o que é uma balança. Sabe também que, para ela ficar equilibrada, precisa ter o mesmo número de bolinhas nos dois lados e, por isso, precisa colocar algumas bolinhas no espaço vazio. Mas você percebeu que o espaço vazio pode aparecer em diferentes posições? Veja que neste cartão o quadradinho aparece na 1ª posição, neste outro na 2ª posição e neste aqui aparece na 3ª posição.

Ela solucionava esses problemas e em seguida apresentava outros três cartões, um de cada vez, e solicitava ao participante que os resolvesse.

Treino de Discriminação condicional

No treino de discriminação condicional, problemas na forma de balança eram apresentados como modelo (A), designado aqui de problema-modelo. As comparações eram nas formas de operação com algarismos (B) ou sentença lingüística (C), dependendo do tipo de relação treinada (Treino A-B e Treino A-C). Para a execução das tarefas, em cada tentativa era apresentado um estímulo modelo e, simultaneamente a este, três estímulos de comparação. Os três estímulos de comparação incluíam um problema com os mesmos dados que o problema-modelo e outros dois, com valores diferentes, mas com a incógnita na mesma posição que a do problema-modelo.

O treino era realizado por meio do procedimento de escolha de acordo com o modelo. Ao todo, eram apresentadas 36 tentativas de discriminação condicional simultânea. Um total de 12 problemas diferentes foi empregado. Cada problema-modelo era apresentado três vezes, alternando-se a posição dos estímulos de comparação. Os participantes que não atingissem 88,9% de acertos (32 de 36 tentativas) deveriam

repetir o bloco de treino. As respostas corretas e as incorretas eram seguidas de *feedback* verbal, informando o acerto ou erro.

A experimentadora apresentava uma página da pasta-catálogo e solicitava que o participante relacionasse o problema-modelo com o problema de comparação correspondente. As seguintes instruções eram fornecidas:

Você pode observar que esta folha tem um problema na parte de cima e três na parte de baixo. Observe e fale para mim qual dos problemas da parte de baixo quer dizer a mesma coisa que o problema da parte de cima. Você não precisa mais dizer qual é a solução do problema.

Após as instruções, a experimentadora demonstrava como o participante deveria proceder, apontando o problema de comparação correspondente, como exemplo.

Teste das relações emergentes

Antes de apresentar as tentativas de teste, a experimentadora informava ao participante que, durante esta etapa, ele deveria responder com base no que ele havia aprendido na etapa anterior e que as respostas não mais seriam seguidas de conseqüências por se tratar de um teste. Tentativas de teste referentes às propriedades de simetria (relações B-A e C-A) e equivalência (relações B-C e C-B) eram apresentadas, sendo três de cada tipo.

Pós-teste

O pós-teste era composto por 45 problemas aritméticos, apresentados na forma de balança, operação e sentença lingüística, organizado da mesma maneira que o pré-teste. Os problemas utilizados no pós-teste eram do mesmo tipo daqueles apresentados no pré-teste, mas diferiam quanto aos valores numéricos envolvidos.

Resultados

Os resultados analisados referem-se ao desempenho individual dos sete participantes selecionados a partir do teste de leitura. Apesar desses participantes terem sido selecionados com base no teste de leitura, houve grande diferença entre eles quanto a leitura dos problemas em forma de sentença. Apenas três dos nove participantes leram sozinhos (P3, P4 e P7), enquanto quatro dos nove participantes só conseguiam ler vagarosamente e de forma escandida, requerendo auxílio da experimentadora (P1, P2, P5 e P6).

A coleta de dados foi planejada de tal forma que dois participantes realizassem o treino de discriminação condicional e testes subseqüentes ao longo de uma única semana. Os dois primeiros participantes (P1 e P2) foram submetidos a sessões com até duas horas de duração para que essa programação fosse cumprida. Inicialmente, P1 e P2 manifestaram muito interesse em participar das atividades, mas apresentaram-se bastante inquietos durante a sessão, especialmente a partir da terceira sessão. Devido a

esse fato, programou-se para os demais participantes uma redução na duração das sessões (30 min em média), coletando-se dados com mais do que dois participantes numa mesma semana. O número de sessões por semana passou então a variar de acordo com o interesse dos participantes, podendo demorar até três semanas para completar o procedimento. Após essas alterações, pôde-se observar que os participantes permaneciam mais atentos e dispostos a realizar as tarefas, do que o que foi observado com P1 e P2, bem como apresentaram porcentagens de acerto superiores.

Uma outra modificação no procedimento foi realizada após a coleta de dados com P1 e P2. Esses dois participantes apresentaram uma certa dificuldade em compreender que a posição da incógnita podia variar e que isso levava a diferentes resoluções. Assim, um treino preparatório foi introduzido antes da 1ª Etapa, para os demais participantes, conforme descrito no procedimento.

A Figura 1 viabiliza a leitura das porcentagens de acerto de cada participante no pré-teste e no pós-teste, considerando a posição da incógnita e a forma de apresentação dos problemas. Verifica-se nessa figura que, com exceção de P2, todos os participantes apresentaram um aumento considerável na porcentagem de acerto no pós-teste em relação ao pré-teste e que, de forma geral, todos os participantes apresentaram porcentagens médias de acerto muito inferiores ao critério de seleção, estabelecido para esse estudo. Observa-se ainda, que no pré-teste a maioria dos participantes apresentou desempenho inferior na resolução dos problemas em forma de operação e sentença lingüística, como é o caso de P1, P3, P4, P6 e P7. Com relação à posição da incógnita, as menores porcentagens de acerto se concentraram nos problemas com a incógnita na posição *a* ou *b*, para a maioria dos participantes (P1, P2, P3, P5 e P6). Apenas P2 apresentou porcentagens de acerto inferiores nos problemas em forma de balança do que nas demais formas de apresentação destes.

Após o treino de discriminação condicional, a porcentagem de acerto de P1, P3, P4 e P7 aumentou consideravelmente, independente da forma de apresentação dos problemas. Nos

problemas com a incógnita nas Posições *b* e *c*, as porcentagens de acerto destes participantes no pós-teste foram muito superiores às apresentadas no pré-teste (ver Figura 1). Entre esses participantes, apenas P1 manteve, nos problemas apresentados em forma de balança na posição *a*, a mesma porcentagem de acerto obtida no pré-teste (60%).

P6 apresentou aumento nas porcentagens de acerto em problemas apresentados sob a forma de operação e balança quando a incógnita localizava-se nas posições *b* e *c*, e uma redução de 20% nos problemas sob a forma operação na posição *c*. Nos problemas em forma de operação, com incógnita na posição *c*, a porcentagem de acerto de P2 e P5 diminuiu. Ambos haviam apresentado 100% de acerto no pré-teste, enquanto no pós-teste esse índice foi para 40% e 80%, respectivamente.

Com relação aos problemas apresentados em forma de sentença lingüística, verificou-se que, de forma geral, o aumento nas porcentagens de acerto no pós-teste foi ligeiramente menor, quando comparado ao observado nas demais formas de apresentação dos problemas, como é o caso dos desempenhos de P1 e P5. P2 e P6 mantiveram o mesmo desempenho no pós-teste em relação ao pré-teste. Por outro lado, P3, P4 e P7 atingiram 100% de acerto em quase todos os problemas apresentados em forma de sentença lingüística após o treino de discriminação condicional.

A Tabela 1 apresenta as porcentagens de acerto por participante nas situações de treino de discriminação condicional e nos testes de simetria e equivalência. Pode-se verificar, nessa tabela, que todos os participantes atingiram, no treino de discriminação condicional, uma porcentagem de acerto superior ao critério estabelecido para se considerar que aprenderam as relações condicionais (88,9%). É possível observar também que a porcentagem de acerto para a relação A-C é ligeiramente inferior do que a da relação A-B, para a maioria dos participantes (P1, P3, P4, P5 e P7).

A maioria dos participantes formou relações de equivalência entre as diferentes formas de apresentação dos problemas, após o treino de discriminação condicional (P1, P2, P3, P4 e P7). Somente P5 não atingiu o critério de 88,9% de acerto para as relações C-A e B-C.

Há que se destacar, por fim, que os participantes que apresentaram os melhores desempenhos no teste de leitura (P3, P4 e P7) também apresentaram as porcentagens de acerto mais altas no pós-teste nas três formas de apresentação dos problemas (operação, sentença lingüística).

Em síntese, os resultados apontam para o seguinte: a) a

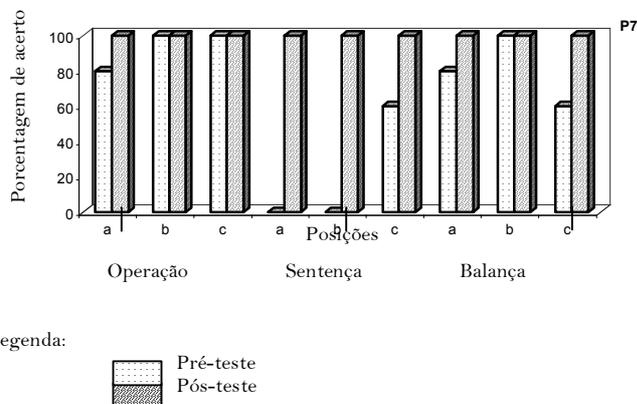


Figura 1. Porcentagens de acerto no pré-teste e pós-teste, considerando a posição da incógnita nos problemas em forma de operação, sentença e balança.

Tabela 1
Porcentagens de Acerto por Participante nas Etapas de Treino e de Testes

Participantes	Situações					
	Treino de Discriminação Condicional		Teste de Simetria		Teste de Equivalência	
	Relação		Relação		Relação	
	A-B	A-C	B-A	C-A	B-C	C-B
P1	100	88,9	100	100	100	100
P2	96,3	100	100	100	100	100
P3	100	92,5	100	100	100	100
P4	100	96,3	100	100	100	100
P5	100	96,3	88,9	77,8	83,3	94,4
P6	92,5	96,3	88,9	88,9	88,9	100
P7	100	96,3	100	100	100	100

maioria dos participantes apresentou um aumento, superior a 20%, nas porcentagens médias de acerto entre as situações de pré-teste e pós-teste; b) nos problemas em forma de sentença lingüística, a porcentagem de repostas corretas foi menor do que a registrada nos problemas em forma de operação e de balança; c) todos os participantes atingiram o critério de acerto estabelecido no teste das relações emergentes com apenas um bloco de treino de discriminação condicional; d) seis dos sete participantes formaram relações de equivalência entre as diferentes formas de apresentação dos problemas; e) P2, P5 e P6 apresentaram uma pequena redução na porcentagem de acerto nos problemas em forma de operação com incógnita na posição *c*.

Discussão

Diversos estudos (Hiebert, 1982; Capovilla et al., 1997; Carpenter & Moser, 1983; Rosenthal & Resnick, 1974) mostram que a posição da incógnita em problemas aritméticos é uma variável que afeta o desempenho de crianças das séries iniciais do ensino básico e da pré-escola. Essa dificuldade é mais acentuada nos problemas em forma de sentença lingüística, pois variáveis como o número de palavras nos problemas, a seqüência da informação e a presença ou não de diferentes palavras que indicam a operação a ser efetuada, além da presença de informações irrelevantes, afetam significativamente o desempenho das crianças (Carpenter & Moser, 1983). Todos os participantes do presente estudo apresentaram no pré-teste desempenhos superiores nos problemas em forma de sentença lingüística com incógnitas localizadas na posição *c* do que nas posições *a* e *b*, corroborando os resultados de pesquisas anteriores. Além disso, eles mostravam-se pouco familiarizados com os problemas em forma de sentença lingüística, em que a incógnita ocupava as posições *a* e *b*. Essa falta de familiaridade permite sugerir, assim como foi feito por Léguas (2002), que os problemas com incógnita na posição *a* e *b* são pouco freqüentes no cotidiano das crianças. No presente estudo, verificou-se que todos os participantes apresentaram, no pré-teste, dificuldades em discriminar as diferentes posições da incógnita. P1 e P2, por exemplo, resolviam todos os problemas como se a incógnita estivesse na posição *c*. Essa dificuldade persistiu para esses participantes, mesmo após o treino de discriminação condicional. Como P1 e P2 foram os dois primeiros participantes a serem submetidos ao procedimento, eles não receberam o treino preparatório, o qual foi introduzido em função do desempenho deles. O treino preparatório passou a ser realizado antes do treino de discriminação condicional, com o objetivo de ensinar aos participantes que os problemas apresentavam incógnitas em diferentes posições e que isso implicava em diferentes estratégias de resolução. O treino preparatório foi implementado com o uso de seis cartões, com balanças impressas. Os participantes foram instruídos a observar as diferentes posições da incógnita nos diferentes problemas antes de tentarem responder, tendo sido apresentada apenas uma tentativa de cada problema, para que o treino

preparatório não pudesse ser caracterizado como um procedimento de ensino de resolução.

O fato de ter havido diferença no desempenho de P1 e P2 em relação aos outros participantes sugere que o treino preparatório foi eficaz para que os participantes aprendessem a discriminar a posição da incógnita, levando-os a responder de forma diferenciada, isto é, com diferentes estratégias de resolução, quando as incógnitas estavam em diferentes posições.

Apesar de se ter constatado que o desempenho na resolução dos problemas com incógnita nas posições *a* e *b* dos participantes que foram submetidos ao treino preparatório foi melhor em comparação aos que não foram, um resultado inesperado foi observado em relação a P5 e P6. Esses dois participantes reduziram de 100% para 80% a porcentagem de repostas corretas nos problemas em forma de operação com incógnita na posição *c*, do pré-teste para o pós-teste. Como estes participantes haviam acertado 100% destes problemas no pré-teste, supõe-se que eles passaram a cometer alguns erros por terem ficado sob o controle das instruções do treino preparatório de como resolver os problemas com incógnitas nas posições *a* e *b*. Um dado adicional que fortalece essa hipótese é que P6 apresentou uma redução na porcentagem de acertos em problemas em forma de operação com a incógnita na posição *c*, mas apresentou 100% de acerto nos problemas com incógnita nas posições *b*.

Com relação ao participante P5, é importante esclarecer que o mesmo apresentou, durante o pós-teste, erros persistentes na resolução da operação $+ 8 = 9$, para a qual afirmava que a solução era quatro. Mesmo quando o experimentador o alertava, instruindo-o a contar e verificar se sua resposta estava correta, ele não alterava sua resposta. Tal padrão de comportamento sugere que, provavelmente, ele estivesse desatento, ou que a operação motivacional não estivesse sendo efetiva. A atenção e motivação reduzidas, também podem ter contribuído para a diminuição na porcentagem de acerto em problemas nas formas de operação com incógnita na posição *c*, apresentada por P5.

Um outro aspecto que pode ser relevante para a análise dos dados sobre a resolução dos problemas é que quase todos os participantes tinham dificuldades para ler os problemas em forma de sentença lingüística. Essa dificuldade já havia sido constatada no teste de leitura, no qual apenas três participantes leram sozinhos, sem serem auxiliados pela experimentadora (P3, P4 e P7). É interessante observar que justamente esses três participantes atingiram maiores porcentagens médias de acerto nos problemas apresentados sob essa forma no pós-teste: 100% (P3 e P7) ou 93% (P4). Os demais apresentaram porcentagens médias mais baixas: 73% (P1), 47% (P2), 80% (P5) e 40% (P6). Os valores mais baixos observados no caso de P2 e P6 devem-se ao fato de que eles continuaram a errar todos os problemas em forma de sentença lingüística com incógnita na posição *a*. Como o objetivo do treino de discriminação condicional não visou o ensino de leitura, essa dificuldade não foi superada no pós-teste e os participantes permaneceram sem responder apropriadamente.

Os resultados da fase de treino de discriminação condicional mostram que o treino foi eficaz para estabelecer relações de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas para quase todos os participantes. Os participantes só requereram um bloco de treino e somente P5 não atingiu o critério de equivalência, embora tenha alcançado um índice bem próximo. Observa-se que o treino de discriminação condicional contribuiu, não apenas para o estabelecimento de relações de equivalência entre os problemas apresentados em diferentes formas, como também para melhorar o desempenho dos participantes na resolução dos problemas aritméticos semelhantes aos que foram usados no treino. Isso permite sugerir que ao serem estabelecidas relações de equivalência entre as diferentes formas de apresentação de problemas aritméticos ocorre transferência de função entre os problemas das diferentes classes (diferentes formas de apresentação dos problemas) e, ao mesmo tempo, generalização de estímulos intraclasses. Problemas de um mesmo formato, por exemplo, na forma de sentença lingüística, mas com valores numéricos diferentes passaram a ser resolvidos corretamente. A transferência de função entre os estímulos é uma das propriedades observadas quando se estabelece relações de equivalência entre estímulos (Markham, Dougher, & Auguston, 2002; de Rose, 1993; Sidman, 1994; Wirth & Chase, 2002).

Assim, os resultados do presente estudo permitem concluir que o estabelecimento de relações de equivalência entre as diferentes formas de apresentação de problemas aritméticos pode ser relevante para melhorar o desempenho de alunos do Ensino Fundamental na resolução de problemas com incógnitas nas diferentes posições, uma vez que a transferência de função de um tipo de problema para outro reduz o efeito de variáveis que tornam maior a complexidade, principalmente, de problemas em forma de sentença lingüística.

A eficácia do procedimento proposto no presente estudo permite fazer inferências quanto a alguns aspectos considerados extremamente relevantes por estudiosos da Educação Matemática (Ex.: Buriasco 1999; D'Ambrósio, 1997; Franchi, 1994; Martins, 2000), conforme foi destacado por Buriasco (1999), ao discutir a importância de um ensino de Matemática contextualizado e significativo.

É preciso que o conteúdo matemático trabalhado na sala de aula seja contextualizado para que possa ganhar sentido; mas é preciso também que o professor conduza com o aluno um processo de análise, de modo que este enxergue claramente que o conhecimento envolvido pode ser usado em outras e diferentes situações. Assim, um dos movimentos presentes na aula de matemática deve ser o que vai da contextualização a descontextualização, que vai transformando manejo, estratégias, conclusões, respostas de problemas específicos, conhecimento localizado, digamos assim, em um saber matemático geral, de caráter universal, que pode servir em novos problemas, em diferentes situações e contextos. E essa é uma das funções do professor de

matemática: prover desse movimento as suas aulas (Buriasco, 1999).

Problemas aritméticos em forma de operação são sentenças matemáticas escritas numa linguagem que, para a maioria das crianças das séries iniciais do ensino fundamental, podem ser consideradas artificiais e sem sentido. Relacionar sentenças desse tipo com uma representação gráfica como a da balança e com as sentenças lingüísticas correspondentes, permite que a sentença matemática passe a fazer sentido por meio do estabelecimento de relações com formas mais contextualizadas de situações do dia-a-dia. Por outro lado, as sentenças lingüísticas, apesar de serem contextualizadas e fazerem mais sentido para as crianças, envolvem variáveis que produzem dificuldades como as relacionadas com a discriminação dos aspectos relevantes do problema.

Estabelecer relações de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas aritméticos, tendo o cuidado de variar os valores das informações nos diferentes problemas, pode ser uma maneira de o professor levar o aluno a aprender que o comportamento (estratégia de resolução) apresentado em uma situação pode ser usado em situações que são semelhantes, isto é, resolver com a mesma estratégia problemas que tem mesma forma (estrutura), e aprender que as mesmas estratégias são aplicáveis em situações nas quais os mesmos problemas são apresentados em diferentes formatos (estruturas diferentes). De acordo com Wilkinson e McIlvane (1993), o responder a relações de equivalência com generalização intraclasse de estímulos (o que eles denominaram “*feature equivalence*”) é o componente necessário para uma abordagem completa das bases do que se caracteriza como sendo o comportamento simbólico (ver também Mattos, 1999).

Referências

- Buriasco, R.L.C. (1999). *Avaliação em matemática: um estudo das respostas de alunos e professores*. Tese de Doutorado não-publicada, Universidade Estadual Paulista. Marília, SP.
- Capovilla, F.C., César, O., Capovilla, A.G.S., & Haydu, V.B. (1997). Equação-equilíbrio: o modelo da balança e a análise da resolução de problemas aritméticos em escolares do ensino fundamental. *Torre de Babel: Reflexões e Pesquisa em Psicologia*, 4, 189-215.
- Carmo, J.S. (2002). Definições operacionais de habilidades matemáticas elementares. In H.J. Guilhardi, M.B.B.P. Madi, P.P. Queiroz, & M.C. Scoz (Eds.), *Sobre comportamento e cognição: contribuições para a construção da teoria do comportamento* (Vol. 9, pp.181-191). São Paulo: ESETec.
- Carmo, J.S., Figueiredo, R.M., & Silva, L.C. (1999). PARTE 1 Introdução. In J.S. Carmo, L.C. Silva, & R.M. Figueiredo (Eds.), *Dificuldades de aprendizagem no ensino de leitura, escrita e conceitos matemáticos* (pp.15-21). Belém: Universidade da Amazônia.
- Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematic concepts and processes* (pp.7-44). New York: Academic.
- Codina, A. & Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. In P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática* (pp.125-135). Granada: Universidad de Granada.

- D'Ambrósio, U. (1997). *Educação matemática: da teoria à prática* (2ª ed.). Campinas: Papirus.
- de Rose, J.C. (1993). Classes de estímulos: implicações para uma análise comportamental da cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 9, 283-303.
- Franchi, A. (1994). Onde está o problema? *A Educação Matemática em Revista*, 2, 29-33.
- Fueyo, V. & Bushell Jr., D. (1998). Using number line procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low-performing first graders. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 31, 417-430.
- Gast, D.L., Vanbiervliet, A., & Spradlin, J.E. (1979). Teaching number-word equivalences: a study of transfer. *American Journal of Mental Deficiency*, 83, 524-527.
- Haydu, V.B., Andrade, M.P., Silva, L.S., Pimentel, N.S., & Capovilla, F.C. (1997). Resolução de problemas aritméticos: analisando a participação de processos verbais e da posição da incógnita. *Torre de Babel: Reflexões e Pesquisa em Psicologia*, 4, 217-232.
- Haydu, V.B., Batista, A.P. & Mazzo, I.M.B. (2002). Resolução de problemas aritméticos em três diferentes formas e a manutenção de classes de estímulos equivalentes [Resumo]. In PIBIC/CNPq, Universidade Estadual de Maringá (Eds.), 1CD-ROM, *XI Encontro Anual de Iniciação Científica*, Maringá, PR.
- Haydu, V.B., Mazzo, I.M.B., Isquierdo, G.R., Pires, I.T.M., & Batista, A.P. (2001). O Modelo da balança e a equivalência de estímulos aplicados à análise de problemas aritméticos [Resumo]. In Associação Psicológica Iberoamericana de Psicologia Clínica e Saúde (Ed.), *II Congresso Iberoamericano de Psicologia Clínica e da Saúde* (pp.275-276). Resumos: Guarujá.
- Hiebert, J. (1982). The position of the unknown set and children's solution for verbal arithmetic problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 341-349.
- Hung, D.W.H. (2000). Some insights into the generalizing of mathematical meanings. *Journal of Mathematical Behavior*, 19, 63-82.
- Iéguas, A.F. & Haydu, V.B. (2002). *Software para a resolução de problemas aritméticos: o modelo da balança*. Dissertação de Mestrado não-publicada, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, PR.
- Jansen, B.R.J. & Maas, H.L.J. (2002). The development of children's rule use on the balance scale task. *Journal of Experimental Child Psychology*, 81, 383-416.
- Lynch, D.C. & Cuvo, A.J. (1995). Stimulus equivalence instruction of fraction-decimal relations. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 28, 115-126.
- Markham, M.R., Dougher, M.J., & Auguston, E.M. (2002). Transfer of operant discrimination and respondent elicitation via emergent relations of compound stimuli. *Psychological Record*, 52, 325-350.
- Martins, A.S.S. (2000). Falar de matemática hoje é... *Millenium*, 20. RetiradoRetrieved on 14/08/2003 from http://www.ipv.pt/millenium/Millenium_20.htm
- Matos, M.A. (1999). Controle de estímulo condicional, formação de classes conceituais e comportamentos cognitivos. *Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva*, 1, 159-178.
- Neef, N.A., Nelles, D.E., Iwata, B.A., & Page, T.J. (2003). Analysis of precurent skills in solving mathematics story problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 36, 21-33.
- Prado, P.S.T. & de Rose, J.C. (1999). Conceito de número: uma contribuição da análise comportamental da cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 15, 227-235.
- Rosenthal, D.J.A. & Resnick, L.B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 66, 817-825.
- Rossit, R.A. (2003). *Matemática para deficientes mentais: contribuições do paradigma de equivalência de estímulos para o desenvolvimento e avaliação de um currículo*. Tese de Doutorado não-publicada, Programa de Pós-Graduação em Educação Especial, Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, SP.
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145-173.
- Selva, A.C.V. & Brandão, A.C.P. (2000). A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 16, 241-249.
- Sidman, M. (1986). Functional analysis of emergent verbal classes. In T. Thompson, & M.D. Zeiler (Eds.), *Analysis and integration of behavioral units* (pp.213-245). New Jersey: Erlbaum.
- Sidman, M. (1994). *Equivalence relations: a research story*. Boston: Authors Cooperative.
- Sidman, M. (2000). Equivalence relations and reinforcement contingency. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 74, 127-146.
- Skemp, R.R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Baltimore: Penguin.
- Skinner, B.F. (1981). *Ciência e Comportamento Humano*. São Paulo: Martins Fontes.
- Skinner, B.F. (1984). An operant analysis of problem solving. *The Behavioral and Brain Sciences*, 7, 583-613.
- Wilkinson, K.M. & McIlvaine, W.J. (2001). Methods for studying symbolic behavior and category formation: Contributions of stimulus equivalence research. *Developmental Review*, 21, 355-374.
- Wirth, O. & Chase, P.N. (2002). Stability of functional equivalence and stimulus equivalence: effects of baseline reversals. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 77, 29-47.
- Zanotto, M.L.B. (2000). *Formação de professores: a contribuição da análise do comportamento*. São Paulo: Educ, Comped, Fapesp.

Submissão: 25/08/2004
1ª revisão: 23/03/2005
Aceite final: 06/04/2005