

## Aplicação da função Cobb-Douglas para análise da produtividade no setor aéreo: o caso da Gol

[Cobb-Douglas function application for productivity analysis in the airline industry: the case of Gol Airlines]

Ernesto Tiaki Kuroda, Alan Joseph Kalfas, Rogéria de Arantes Gomes Eller\*

*Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Brazil*

Submitted 5 Sep 2011; received in revised form 26 Jan 2012; accepted 30 Jan 2012

---

### Resumo

Este artigo tem como objetivo analisar a aplicação da função Cobb-Douglas como ferramenta para análise da produtividade no setor aéreo. Uma série de dados da empresa Gol Linhas Aéreas foi selecionada para estimar uma função de produção utilizando variáveis que representassem o capital e o trabalho como insumos principais. A série de dados foi analisada em três partes: a primeira, do primeiro trimestre de 2003 até a aquisição da Varig, no segundo trimestre de 2007; a segunda, que considera o período após aquisição da Varig; e a última, considerando o período completo, de 2003 até 2009. Os resultados mostram que com a compra da Varig há redução da produtividade da empresa observada pela redução da participação do fator trabalho nos resultados medidos em passageiro-quilômetro transportado. Esse efeito se deve ao aumento do número de trabalhadores na nova empresa, sem que houvesse consequente aumento da produção. Os resultados são consistentes com a teoria econômica, embora o período de análise deva ser considerado como curto prazo.

*Palavras-Chave: produtividade; função Cobb-Douglas; transporte aéreo.*

### Abstract

This article aims to analyze the application of the Cobb-Douglas function as a tool for productivity analysis in the airline industry. A series of data from Gol Airlines was selected to estimate a production function using variables that represent capital and labor inputs. The data set was analyzed in three parts: first, from the first quarter of 2003 through the acquisition of Varig, in the second quarter of 2007; the second period after considering the acquisition of Varig, and the last one, considering the whole period from 2003 to 2009. The results show that the acquisition of Varig reduced the productivity observed by the reduction of the participation of labor in the results measured in revenue passenger kilometers. This effect is due to the increase in the number of workers in the new company, with no resulting increase in production. The results are consistent with the economic theory, although the period of analysis must be considered as a short term.

*Key words: productivity; Cobb-Douglas function; air transportation.*

\* Email: rogeria@ita.br.

---

### Recommended Citation

Kuroda, E. T., Kalfas, A. J. and Eller, R. S. G. (2012) Aplicação da função Cobb-Douglas para análise da produtividade no setor aéreo: o caso da Gol. Journal of Transport Literature, vol. 6, n. 2, pp. 169-179.

---

■ JTL|RELIT is a fully electronic, peer-reviewed, open access, international journal focused on emerging transport markets and published by BPTS - Brazilian Transport Planning Society. Website [www.transport-literature.org](http://www.transport-literature.org). ISSN 2238-1031.

This paper is downloadable at [www.transport-literature.org/open-access](http://www.transport-literature.org/open-access).

## 1. Introdução

A teoria da produção tem um papel fundamental tanto na indústria de bens quanto de serviços como ferramenta de gestão econômica das empresas. Essa função mostra de que maneira os insumos devem ser combinados para gerar um produto ou serviço da forma mais eficiente.

No transporte aéreo, a estimação da função de produção é importante para a análise da capacidade de produção que, neste trabalho, é descrita por meio do produto *Revenue Passenger Kilometer* (RPK) obtido pela utilização dos insumos capital (taxa de utilização média das aeronaves, em horas, multiplicada pelo número médio de aeronaves operacionais no período) e trabalho (quantidade de funcionários). Trata-se de uma escolha simplificada de insumos, cabendo destacar que outros insumos podem fazer parte da função, como combustíveis, por exemplo (Bettini e Oliveira, 2011). Ainda assim, considera-se que a função de produção obtida permite avaliar o rendimento dos insumos considerados na produção total da empresa, podendo ser tomada como uma ferramenta de apoio à decisão sobre melhora de produtividade e modernização de sistemas e processos.

Neste artigo utiliza-se a função Cobb-Douglas, publicada em 1928 (Cobb e Douglas, 1928) para estimar a função produção que é apresentada da seguinte forma:

$$Q = AK^{\beta_2}L^{\beta_3} \quad (1)$$

Onde Q representa o produto, enquanto K e L são os insumos considerados (capital e trabalho, respectivamente), A é uma constante e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros.

Aplicando o logaritmo para ambos os lados da equação e chamando o termo constante de  $\beta_1$ , tem-se:

$$\ln Q = \beta_1 + \beta_2 \ln K + \beta_3 \ln L \quad (2)$$

Esta é uma forma linearizada da função para que se possa aplicar a técnica de regressão pelo método dos mínimos quadrados ordinários.

Este trabalho tem o objetivo de demonstrar a aplicação da Função Cobb-Douglas ao transporte aéreo, como ferramenta de análise de produtividade do setor, utilizando dados de produção e insumos da empresa Gol Linhas Aéreas no período de 2003 a 2009.

O presente trabalho está assim dividido: na seção 1 é feita a introdução ao tema, mostrando o objetivo e a estrutura do trabalho; na seção 2 é apresentado o desenvolvimento da pesquisa onde se mostra um resumo dos dados trimestrais da Gol utilizados no estudo, o modelo empregado e uma análise preliminar dos dados. Na seção 3 é aplicada a função sobre a base de dados e, na seção 4, apresenta-se a conclusão baseada nos resultados obtidos.

## **2. Desenvolvimento**

### ***2.1 Base de dados***

Os dados utilizados foram obtidos nos relatórios trimestrais emitidos pela Gol Linhas Aéreas de onde foram selecionados o *Revenue Passenger Kilometer (RPK)*; a taxa de utilização diária média das aeronaves, em horas; o número médio de aeronaves operacionais no período; e o número de funcionários efetivos.

Em 9 de abril de 2007, a Gol assumiu o controle da Varig e o reflexo desta aquisição pode ser observado a partir do relatório referente ao segundo trimestre de 2007. Para efeito de análise, a função Cobb-Douglas foi aplicada sobre a base de dados dividida em três períodos:

1. do primeiro trimestre de 2003 (1T03) até o primeiro trimestre de 2007 (1T07) que corresponde ao período anterior à aquisição da Varig;
2. do segundo trimestre de 2007 (2T07) até o último trimestre de 2009 (4T09) que corresponde ao período após a aquisição da Varig;
3. do primeiro trimestre de 2003 (1T03) até o último trimestre de 2009 (4T09) que compreende ambas as fases (períodos pré e pós aquisição da Varig).

A aplicação da função para três períodos distintos, identificados por Período 1, Período 2 e Período 3, respectivamente, visa a analisar o impacto que a aquisição da Varig exerceu sobre a produtividade da Gol e verificar a aplicabilidade da função de produção. Cabe ressaltar que

o período de análise é curto, do ponto de vista da gestão do negócio. A medida de produtividade a ser analisada corresponde ao rendimento do insumo trabalho (L) sobre o produto final (RPK) ou, de outra forma, o impacto em RPK quando há uma pequena variação de L. Os dados coletados foram agrupados na tabela 1, abaixo:

**Tabela 1 – Dados Trimestrais da empresa Gol Linhas Aéreas**

<b>Período (Trimestre)</b>	<b>RPK (MM)</b>	<b>Taxa de utilização diária (h)</b>	<b>Número médio de aeronaves</b>	<b>Funcionários efetivos</b>
1T03	1.065	12,70	20,30	2.235
2T03	1.155	12,60	21,00	2.323
3T03	1.335	12,70	22,00	2.385
4T03	1.340	12,80	22,00	2.453
1T04	1.506	13,50	21,70	2.572
2T04	1.423	13,30	22,00	2.685
3T04	1.594	13,90	22,70	2.919
4T04	1.766	13,70	26,30	3.303
1T05	1.977	14,00	28,00	3.607
2T05	2.239	13,70	32,00	4.002
3T05	2.627	13,90	36,30	4.678
4T05	2.869	13,90	40,00	5.456
1T06	3.066	14,40	43,00	5.991
2T06	3.523	13,90	48,30	7.229
3T06	4.107	14,30	51,30	8.045
4T06	4.123	14,20	59,00	8.840
1T07	4.894	15,00	65,80	9.595
2T07	5.741	14,10	87,40	13.313
3T07	5.470	13,40	91,00	14.436
4T07	6.567	13,30	101,80	15.722
1T08	6.837	13,40	109,50	16.685
2T08	6.897	12,80	109,30	16.567
3T08	5.944	12,80	103,40	15.963
4T08	5.629	11,30	105,70	15.911
1T09	5.821	11,30	107,30	16.799
2T09	5.795	11,30	108,20	17.195
3T09	6.706	12,10	109,30	17.678
4T09	7.771	12,20	108,70	17.963

Fonte : Gol Linhas Aéreas.

## 2.2 Modelo Proposto

Neste modelo, a função Cobb-Douglas foi utilizada na sua forma log-linear, onde a produção é função das variáveis capital e trabalho. A medida representativa da produção foi definida como o RPK (*Revenue Passenger Kilometer*) por ser uma medida conhecida e amplamente utilizada pelas empresas no transporte aéreo. A variável capital foi representada pelo produto entre a taxa de utilização média das aeronaves e o número médio de aeronaves operacionais. Por fim, a variável trabalho foi representada pelo número médio de funcionários, resultando na seguinte equação:

$$\text{Ln (RPK)} = \beta_1 + \beta_2 \text{Ln (HVT)} + \beta_3 \text{Ln (FUN)} \quad (3)$$

onde:

RPK: *Revenue Passenger Kilometer* (em milhões de reais);

HVT: Horas de voo totais diárias, obtidas a partir do produto entre a taxa de utilização média diária das aeronaves e o número médio de aeronaves operacionais;

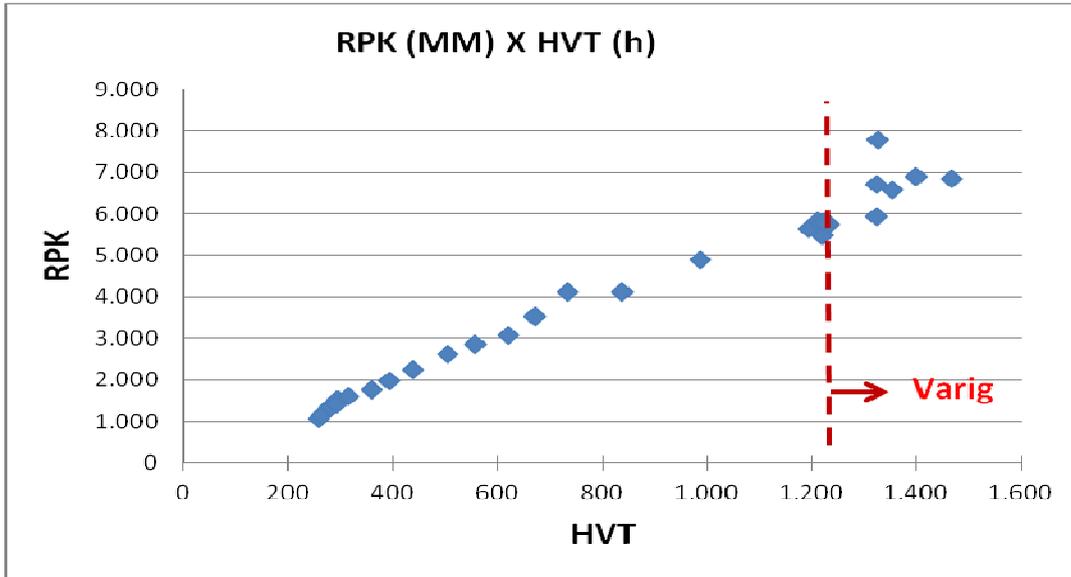
FUN = Número de funcionários efetivos no período;

$\beta_i$ : Coeficientes a serem determinados.

Neste modelo *log-linear* (forma linearizada da função logarítmica) o parâmetro  $\beta_1$  representa a constante e os parâmetros  $\beta_2$  e  $\beta_3$  representam as elasticidades da produção em relação ao capital e ao trabalho, respectivamente.

## 2.3 Análise preliminar da base de dados

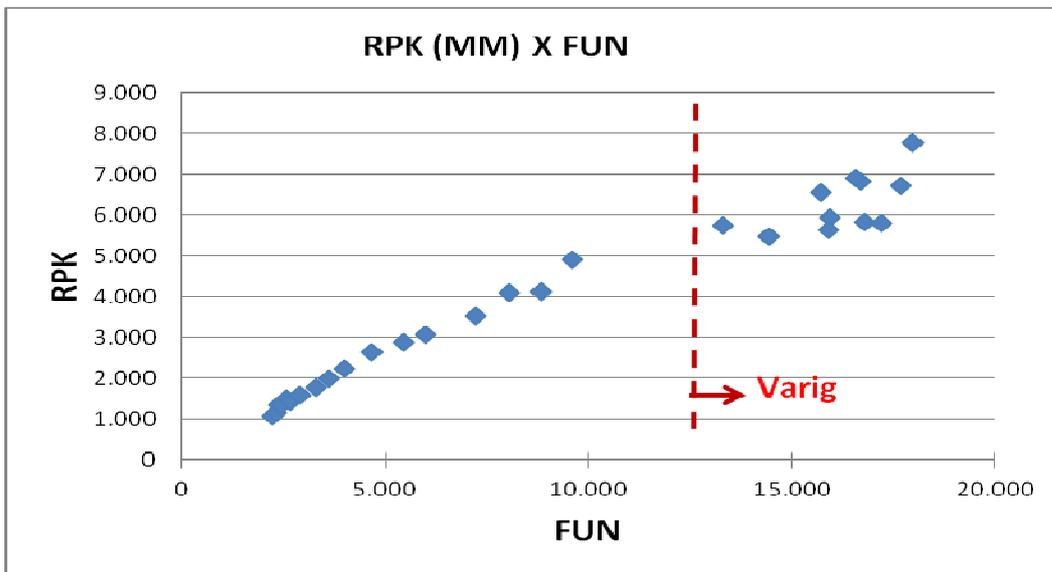
A hipótese do trabalho é que a incorporação dos insumos capital e trabalho da Varig afetou a produção da nova empresa, o que deverá ser observado pelo comportamento do RPK em função de L antes e depois da fusão. As Figuras 1 e 2 mostram, respectivamente, os efeitos das variações das horas totais de voo e do número de funcionários sobre o RPK nos períodos considerados.



Fonte : Gol Linhas Aéreas

**Figura 1 – Efeito de HVT (h) sobre RPK (MM)**

Observa-se uma boa correlação dos dados até a aquisição da Varig. A partir desse ponto verifica-se uma maior dispersão, o que evidencia a influência da entrada do ativo na Varig na empresa, sem que houvesse o respectivo aumento na produção. A Figura 2 mostra a variação do RPK em função do número de funcionários (FUN):



Fonte : Gol Linhas Aéreas

**Figura 2 – Gráfico RPK (MM) x FUN**

Da mesma forma, observa-se uma boa correlação dos dados, com exceção do período após a aquisição da Varig, onde existe uma maior dispersão dos pontos.

### 3. Aplicação da função Cobb-Douglas

Nesta seção são mostrados os resultados da aplicação da função Cobb-Douglas aos 3 grupos de dados: 2003 a 2007, antes da aquisição da Varig; 2007 a 2009, posterior à aquisição da Varig; e 2003 a 2009, considerando todo o período de operação da empresa. As tabelas 2 a 4 mostram os cálculos e as equações geradas.

#### 3.1 Período 1 (1T03 a 1T07)

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,995609
R-Quadrado	0,991237
R-Quad ajust	0,989985
Erro padrão	119,139643
Observações	17

#### ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significância</i>
Regressão	2	22478205,5	11239102,75	791,8064877	3,97E-15
Resíduo	14	198719,5621	14194,25443		
Total	16	22676925,06			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	42,93429	95,48026	0,44967	0,65983
Variável X 1	2,40618	1,19272	2,0174	0,06325
Variável X 2	0,26081	0,10811	2,4123	0,03015

Baseado nos dados da regressão, a função Cobb-Douglas é apresentada da seguinte forma:

$$\text{Ln (RPK)} = 42,93 + 2,40 \text{ Ln (HVT)} + 0,26 \text{ Ln (FUN)} \quad (4)$$

Os dados foram então, analisados para o período correspondente ao 2º. Trimestre de 2007 até o 4º. Trimestre de 2009.

### 3.2 Período 2 (2T07 a 4T09)

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,83113
R-Quadrado	0,69077
R-Quad ajust	0,61346
Erro padrão	444,26732
Observações	11

#### ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significância</i>
Regressão	2	3527227,326	1763613,66	8,93541498	0,009143627
Resíduo	8	1578987,583	197373,448		
Total	10	5106214,909			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	-3443,81835	2308,48246	-1,49181	0,17409
Variável X 1	4,70872	1,68433	2,7956	0,02336
Variável X 2	0,22358	0,10859	2,05889	0,07349

Baseado nos dados da regressão, a função Cobb-Douglas é apresentada da seguinte forma:

$$\text{Ln (RPK)} = -3443,82 + 4,71 \text{ Ln (HVT)} + 0,22 \text{ Ln (FUN)} \quad (5)$$

### 3.3 Período 3 (1T03 a 4T09)

<i>Estatística de regressão</i>	
R múltiplo	0,98913
R-Quadrado	0,97837
R-Quad ajust	0,97664
Erro padrão	334,5358
Observações	28

#### ANOVA

	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significância</i>
Regressão	2	1,27E+08	63286939	565,4951	1,54E-21
Resíduo	25	2797855	111914,2		
Total	27	1,29E+08			

	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>
Interseção	178,3853	164,1895	1,08646	0,28764
Variável X 1	3,83019	0,83415	4,59171	0,00011
Variável X 2	0,07466	0,06083	1,22737	0,23112

Baseado nos dados da regressão, a função Cobb-Douglas é apresentada da seguinte forma:

$$\text{Ln (RPK)} = 178,38 + 3,83 \text{ Ln (HVT)} + 0,075 \text{ Ln (FUN)} \quad (6)$$

## Conclusão

A aplicação da função Cobb-Douglas através de uma regressão utilizando o método dos mínimos quadrados ordinários mostrou uma boa correlação entre as variáveis RPK (produto), HVT (capital) e FUN (trabalho) no período anterior à aquisição da Varig.

Nos três períodos analisados, os coeficientes mostram nitidamente uma característica típica do transporte aéreo que é ser capital intensiva, ou seja, o coeficiente da variável capital é relativamente maior do que o coeficiente da variável trabalho, evidenciando que a variável capital contribui com um peso maior do que a mão-de-obra na produção do *output*.

Um ponto interessante quando comparados os períodos um e dois é o aumento do coeficiente da variável capital no período dois, sendo que o coeficiente da variável trabalho permanece

praticamente inalterado. Isto pode ser justificado pelo fato de que o aumento da frota ocasionado pela aquisição da Varig tenha tornado a função ainda mais capital intensiva do que já mostrava ser pela redução relativa da contribuição do insumo trabalho. A redução da correlação entre as variáveis independentes e o produto (RPK) (de 0,99 no período um para 0,69 no período dois) também evidencia o impacto da entrada da Varig na empresa Gol.

Por último, a análise do período três, que compreende tanto a fase anterior quanto a fase posterior à aquisição da Varig, mostra um coeficiente da variável capital próximo à média dos outros dois períodos, porém o coeficiente da variável trabalho tem o seu valor reduzido de forma substancial. Isto mostra que quando o período completo é analisado, a mão de obra perde relevância, podendo este fato ser justificado pelo excesso de mão-de-obra que acompanhou a aquisição da Varig, evidenciando uma queda na produtividade da empresa.

Pode-se afirmar que os dados obtidos possibilitam uma análise apenas de curto prazo, considerando-se o período de abrangência, e indicam que a aquisição da Varig pode ter impactado a função produção da Gol no sentido de torná-la mais dependente da variável capital e com a variável trabalho perdendo relevância. A quantidade de mão-de-obra efetiva na empresa no período posterior à aquisição da Varig mostra-se excessiva, reduzindo a produtividade da empresa naquele período.

Considera-se, dessa forma, que o objetivo do trabalho foi atingido, demonstrando que a aplicação da função de produção Cobb-Douglas mostrou-se adequada para a análise proposta.

## Referências

- Amorim, H. C. (2007) A Gol ainda é uma empresa low-fare? *Journal of Transport Literature*, vol. 1, n. 1, pp. 23-45.
- Barros Jr, J. R. (2007) Custos no transporte aéreo: determinantes e modelos. *Journal of Transport Literature*, vol. 1, n. 2, pp. 70-109.
- Barrow, M. (2008) Estatística para economia, contabilidade e administração. Ed. Atica, 1ª Edição.
- Bettini, H. F. A. J. e Oliveira, A. V. M. (2011) Transporte aéreo regional: entre economias de densidade e custos de transação. *Journal of Transport Literature*, vol. 5, n. 4, pp. 171-187.
- Cobb, Charles W. e Douglas, Paul H. (1928) A Theory of Production. *American Economic Association*, pp. 139-165.
- Fernandes, E. e Pires, H. M. (2011) Desempenho de empresas aéreas: uma análise mundial. *Journal of Transport Literature*, vol. 5, n. 3, pp. 123-140.

- Fortes, J. L. (2011) Ainda há diferença no serviço de bordo entre empresas aéreas brasileiras? *Journal of Transport Literature*, vol. 5, n. 4, pp. 103-118.
- Fraga, R. (2010) Estudo de Caso: Histórico e Análise Evolutiva da Trip Linhas Aéreas. *Journal of Transport Literature*, vol. 2, n. 2, pp. 66-93.
- Fregnani, J. A., Ferreira, N. S. e Griebeler, M. C. (2009) Análise de Custos Logísticos do Transporte Aéreo Regional. *Journal of Transport Literature*, vol. 3, n. 2, pp. 7-24.
- Gol Linhas Aéreas Inteligentes (2010) Relatórios Trimestrais. Disponível em [www.voegol.com.br](http://www.voegol.com.br). Acesso em 06 de junho de 2010.
- Guterres, M. X. e Correia, A. (2007) *Estimação de uma Função de Produção para a Indústria do Transporte Aéreo Nacional*. XXVII ENEGEP.
- Martins, F. G. D., DaSilva, F. G. F., Rocha, C. H., Queiroz, M. e Araújo, C. E. F. (2012) Análise de eficiência estimando fronteiras paramétricas Cobb-Douglas e translog: o caso de empresas de transporte rodoviário interestadual de passageiros por ônibus no Brasil. *Journal of Transport Literature*, vol. 6, n. 3.
- Melo Filho, C. R. (2011) O custo do seguro aeronáutico e seus determinantes. *Journal of Transport Literature*, vol. 5, n. 1, pp. 83-96.
- Porto, P. P. e Lopes, D. R. (1995) Empresas Nacionais de Transporte Aéreo Regular: Uma Função de Produção Possível. *Revista ITA-Engenharia*. Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Santos, F. A. B. (2011) O arrendamento de aeronaves no mercado brasileiro de transporte aéreo regular. *Journal of Transport Literature*, vol. 5, n. 3, pp. 210-228.