



# Modelos integrados de dimensionamento e sequenciamento da produção: aplicação em uma fábrica de cimento para refratário

*Integrated lot sizing and production scheduling formulations: an application in a refractory cement industry*

Fernanda de Freitas Alves<sup>1</sup>  
Thiago Henrique Nogueira<sup>2</sup>  
Rafaella de Souza Henriques<sup>2</sup>  
Priscila Vieira de Castro<sup>2</sup>

**Resumo:** O presente trabalho apresenta um problema de dimensionamento e sequenciamento integrados para uma fábrica de grande porte de cimento para refratário. Foram abordadas três formulações matemáticas: duas presentes na literatura e uma proposta como alternativa às já existentes. Este estudo tem como objetivo comparar as formulações tanto em relação ao seu desempenho quanto à sua aplicabilidade como ferramenta de suporte à tomada de decisão. Uma dessas formulações utiliza variáveis contínuas e as outras são baseadas em variáveis indexadas no tempo. Estes modelos matemáticos abordam um conceito específico de como as variáveis e parâmetros são definidos, exigindo premissas e definições particulares para se adequar ao problema real. A fim de considerar os diferentes aspectos da situação prática, foram geradas várias instâncias a partir de distribuições uniformes, baseadas em informações reais. Extensivos testes computacionais foram executados e, com base nesses resultados, as modelagens foram avaliadas como ferramenta de apoio à decisão e as suas eficiências foram comparadas.

**Palavras-chave:** *Scheduling; Lot sizing; Planejamento e controle da produção; Modelos de programação matemática.*

**Abstract:** *This work presents an integrated lot sizing and scheduling problem for a large refractory cement manufacturer. Three mathematical formulations were addressed: two already presented in the literature, and one proposed as an alternative to the existing ones. This study aims to compare these formulations with respect to their performance and applicability as a decision support tool. One of these formulations uses continuous variables, whereas the others are based on time-indexed variables. These mathematical models address the specific concept of how variables and parameters are defined, requiring assumptions and particular settings to suit the real problem. In order to consider the different aspects of the practical situation, several instances were generated from uniform distributions based on real information. Extensive computational tests were run and, based on the results, the formulations were evaluated as a decision support tool and their efficiencies were compared.*

**Keywords:** *Scheduling; Lot sizing; Production planning and control; Mathematical programming formulations.*

## 1 Introdução

Dados do Ministério de Minas e Energia (Brasil, 2009) do Brasil mostram que os refratários representam um segmento de extrema importância, sendo que todos os processos industriais que utilizam calor necessitam diretamente destes, principalmente as indústrias de base, como as siderúrgicas. Segundo a Magnesita Refratários (2015), o mercado destes produtos movimentou cerca de 25 bilhões de dólares por ano em todo o mundo, sendo que as seis maiores empresas da indústria representam quase 40% de

todas as vendas globais de refratários. Projeta-se que o consumo destes produtos cresça 3,3% até o ano de 2028.

Este trabalho surgiu da necessidade de buscar benefícios na alavancagem de resultados financeiros, considerando um mercado com concorrência crescente e com preços pouco distintos. Dessa forma, uma maior organização da linha de produção é imprescindível para redução de custos sem que esta interfira na qualidade do produto final. A Pesquisa Operacional

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Avenida Antônio Carlos, 6627, Pampulha, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil, e-mail: fernandafalves@ufmg.br

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Viçosa – UFV, Rodovia MG-230 – Km 7, CEP 38810-000, Rio Paranaíba, MG, Brasil, e-mail: thnogueira.ufv@gmail.com; rafaellah@ufv.br; priscila.vieira@ufv.br

Recebido em Abr. 7, 2015 – Aceito em Dez. 14, 2015

Suporte financeiro: FAPEMIG – primeira autora.

surge então como ferramenta para possibilitar melhorias a fim de se obter uma maior organização do processo produtivo, permitindo auxiliar a tomada de decisão por meio da modelagem matemática de situações reais (Nogueira, 2008).

O presente estudo é resultado de um problema real de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em uma fábrica de grande porte de cimento para refratário situada em Contagem/MG. Esta empresa dedica-se à mineração, produção e comercialização de uma grande linha de materiais refratários, sendo o terceiro maior produtor no mundo e líder no mercado nacional destes produtos. Atualmente emprega cerca de 6 400 funcionários e possui capacidade de produção de mais de 1,4 milhão de toneladas de refratários ao ano, obtendo uma receita de vendas de 2,7 bilhões de reais em 2013, com vendas para mais de 1 000 clientes em mais de 100 países, resultando em um lucro líquido de aproximadamente 30 milhões de reais.

O objetivo deste estudo é minimizar o custo de estoque e da demanda não atendida, geralmente ocasionados pela falta de organização da fábrica e de suas atividades. O processo estudado é realizado em fluxo contínuo e pode ser caracterizado como um problema de uma máquina, a qual recebe matéria-prima e realiza o processamento, resultando em um produto final. Neste processo, a máquina gargalo é responsável pelo ritmo de produção e são considerados tempos de preparação assimétricos entre lotes de produção, ou seja, possuem variações de tempo para cada tipo de produto/família de produtos.

No presente trabalho, o problema é formulado matematicamente de três formas distintas, duas existentes na literatura e uma nova. Visando comparar o desempenho das três formulações, os limites inferiores, obtidos pelas médias da relaxação linear e pelo resultado ótimo encontrado utilizando um *software* comercial, foram discutidos. Como o

problema abordado é do tipo *NP-Difícil*, com instâncias maiores o tempo computacional é um limitante para o *software* alcançar resultados ótimos. A relaxação linear foi utilizada para estes modelos a fim de se encontrar os limites inferiores, relaxando-se todas as suas variáveis inteiras.

Com o intuito de avaliar o modelo proposto, realizou-se um estudo comparando-o com duas abordagens distintas: um modelo com variáveis contínuas baseado em Manne (1960), Santos (2006) e Carvalho & Santos (2006) e um modelo de referência com variáveis indexadas baseado em Toledo et al. (2007), Toso et al. (2009) e Ferreira et al. (2010). Estes modelos são aplicados a instâncias retiradas de dados reais e seus resultados são comparados.

Para atingir os objetivos aqui descritos, utilizou-se a abordagem do horizonte rolante, tal como mostrado na Figura 1. Esta técnica consiste em um diferencial para reduzir o tempo computacional, em que o primeiro período é dividido em subperíodos e vai deslizando no tempo à medida que o planejamento é executado, com o sequenciamento detalhado somente para o período imediato. Posteriormente, o horizonte é rolando e o modelo rodado novamente, sendo atualizado com novas informações. O planejamento para períodos futuros é feito somente para avaliação de capacidade. Deste modo, reduz-se drasticamente o número de variáveis do modelo (Carvalho & Santos, 2006).

Buxey (1989) ressalta a inutilidade em gastar esforços com longos períodos de tempo, dado que a incerteza cresce com o tamanho do tempo auscultado. O modelo de planejamento proposto aplica o horizonte de planejamento tal como discutido em Santos (2006).

Este trabalho é dividido em 6 seções: a seção 1 apresenta uma introdução ao tema estudado. Na seção 2, é feita uma discussão bibliográfica acerca deste. A seção 3 aborda o tipo de problema e as peculiaridades da empresa em estudo. A seção 4 apresenta o modelo proposto e outros já existentes na

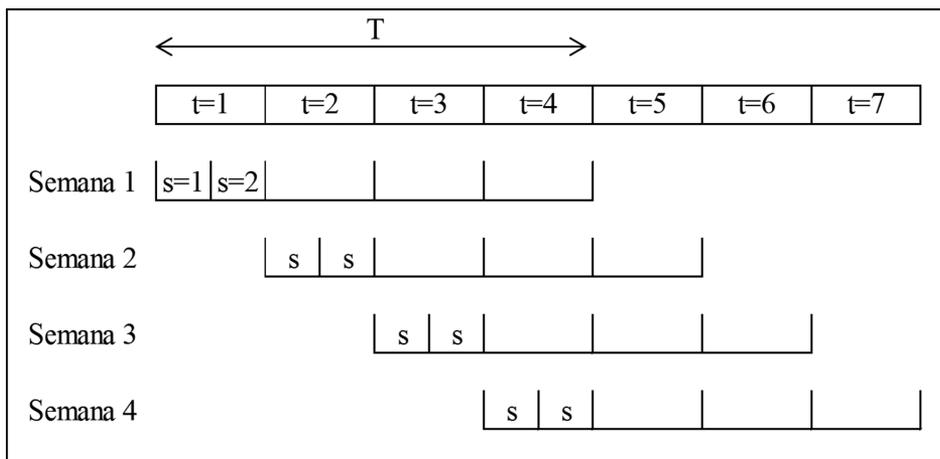


Figura 1. Horizonte rolante.

literatura, comparando-os. Na seção 5, são discutidos os resultados dos modelos apresentados. Por fim, a seção 6 conclui sobre o estudo.

## 2 Revisão bibliográfica

Estudos sobre o planejamento da produção são encontrados em grande quantidade na literatura. Segundo Fernandes & Santoro (2005), os problemas de Planejamento e Controle da Produção (PCP) são trabalhados de três formas: considerando apenas o dimensionamento dos lotes de produção; considerando apenas o sequenciamento diário dos itens a serem produzidos; ou considerando essas duas formas integradas, ou seja, o PCP integrado com sequenciamento. Esta última forma tenta unir o planejamento de um horizonte de tempo maior ao de curto prazo, realizando o dimensionamento semanal dos itens e o sequenciamento diário destes.

A Tabela 1 apresenta em ordem cronológica as principais referências da literatura utilizadas para o presente trabalho. Como pode ser observado, cerca de 10% destes trabalhos abordam os problemas de dimensionamento de lotes. Destes, todos têm o objetivo de minimização de custos, sendo que um deles utiliza para isso a Relaxação Lagrangeana.

Aproximadamente 30% dos trabalhos apresentados na Tabela 1 são sobre problemas de sequenciamento da produção. Considerando os trabalhos que apresentam modelos matemáticos, quase 70% deles utilizam métodos exatos, tal como o *Branch and Bound*, e 30%, métodos heurísticos. Mais de 40% dos problemas de sequenciamento têm o objetivo de reduzir os custos de antecipação e atraso, e os 60% restantes têm objetivos diversos, como minimização dos custos dos recursos produtivos e da preparação da linha de produção.

Cerca de 60% dos trabalhos analisados tratam de problemas de PCP integrado com sequenciamento. Considerando os estudos que possuem modelos matemáticos, 40% destes utilizam para resolução os métodos exatos, tal como *Branch and Bound* e *Branch and Cut*, 50% utilizam a heurística *relax-and-fix* e o restante utiliza algoritmos de Busca Local e outras heurísticas. Quanto aos objetivos destes estudos, 45% deles minimizam conjuntamente custos de estoque, demanda não atendida/atrasada e preparação. O restante possui objetivos diversos, incluindo a minimização dos custos de horas extras e produção. Cerca de 80% dos trabalhos podem ser considerados problemas multiobjetivo, e, destes, 74% são problemas integrados, 10% são problemas de dimensionamento e 16% são problemas de sequenciamento.

É possível perceber também que, assim como o presente estudo, quase 90% dos trabalhos têm o objetivo de minimizar os custos, sejam eles de estoque, demanda não atendida, produção, atraso ou preparação. O problema em estudo não é encontrado

com o mesmo foco em aplicações práticas na literatura. Aqueles de melhor compatibilidade foram encontrados nos trabalhos de Toso & Morabito (2005) e Henriques et al. (2010), os quais analisam problemas de sequenciamento de linhas de produção discretas, com foco no atendimento dos produtos finais e determinação do tamanho do lote de produção. Outros trabalhos que são similares em relação aos objetivos deste são Araujo et al. (2007), Ferreira et al. (2009), Ferreira et al. (2010) e Stadtler & Sahling (2012).

Os problemas de sequenciamento são amplamente estudados na literatura devido ao nível de dificuldade e aplicabilidade, podendo se estender ao sequenciamento da produção, projetos, roteamento de veículos, entre outros (Nogueira, 2014). Os modelos matemáticos de sequenciamento consistem em alocar tarefas e recursos escassos a produtos de forma a atender ao objetivo pré-estabelecido, definindo a ordem de produção dos bens, tal como discutido em Allahverdi et al. (2008), Pinedo (2012) e Leung (2004). Aplicações destes problemas são também vistas em Lawler (1976), Manne (1960), Du & Leung (1990), Sousa & Wolsey (1992), Tavares (2002), Santos & Massago (2007), Bustamante (2007), Yamashita & Morabito (2007), Chen & Askin (2009), Ramos & Oliveira (2011) e Rego (2013).

As decisões de dimensionamento estão relacionadas à quantidade de itens finais. Elas devem considerar a influência dos fatores produtivos, os custos referentes a eles e como estes custos podem influenciar no PCP. Trabalhos que abordam apenas o dimensionamento podem ser vistos em Brahimi et al. (2006) e Molina et al. (2013).

O problema estudado é composto por um modelo integrado de dimensionamento e sequenciamento, tal como abordado nos estudos de Araujo et al. (2004), Carvalho & Santos (2006), Santos (2006), Toledo et al. (2007), Araujo et al. (2007), Toso et al. (2009), Ferreira et al. (2009), Ferreira et al. (2010), Bernardes et al. (2010), Henriques et al. (2010), Stadtler (2010), Shim et al. (2011), Defalque et al. (2011), Clark et al. (2011), Stadtler & Sahling (2012) e Seeanner & Meyr (2013).

Trabalhos que utilizam heurísticas para resolver modelos integrados podem ser vistos em Araujo et al. (2007) e Shim et al. (2011). Métodos exatos também são utilizados para resolver problemas integrados, como pode ser visto em Toledo et al. (2007). Revisões mais detalhadas sobre os métodos exatos podem ser vistos em Nemhauser & Wolsey (1988), Pochet & Wolsey (2006), Arenales et al. (2007) e Wolsey (2008).

## 3 Problema

O estudo consiste em um problema de dimensionamento e sequenciamento de lote multi-item em uma máquina, capacitado e com possibilidade de formação de estoques e não atendimento da demanda. A base de

Tabela 1. Trabalhos da literatura utilizados, bem como seu método de resolução e objetivo.

Autor	Problema	Método de Solução	Função Objetivo
Manne (1960)	Sequenciamento	-	Minimizar tempo total de produção
Sousa & Wolsey (1992)	Sequenciamento	Planos de Corte/ <i>Branch and Bound</i>	Minimizar custos/Maximizar lucros
Tavares (2002)	Sequenciamento	-	-
Araujo et al. (2004)	PCP Integrado com Sequenciamento	Algoritmo de Busca Local	Minimizar custos de estoque, atraso e preparação
Leung (2004)	Sequenciamento	-	-
Toso & Morabito (2005)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística <i>relax-and-fix</i>	Minimizar custos de estoques e horas extras
Carvalho & Santos (2006)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Bound</i>	Minimizar custos de preparação
Brahimi et al. (2006)	Dimensionamento	-	Minimizar custos de produção, preparação, estoques e não atendimento da demanda
Santos (2006)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Bound</i>	Minimizar custos de preparação
Araujo et al. (2007)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística <i>relax-and-fix</i> /Algoritmo de Busca Local	Minimizar soma ponderada dos custos de atraso, estoques e preparação
Bustamante (2007)	Sequenciamento	<i>Branch and Bound</i>	Minimizar soma de custos de antecipação e atraso
Yamashita & Morabito (2007)	Sequenciamento	<i>Branch and Bound</i>	Minimizar custos totais de alocação de recursos de projetos
Toledo et al. (2007)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Cut</i> /Relaxação Linear	Minimizar custos de produção, preparação e estoques
Allahverdi et al. (2008)	Sequenciamento	-	Minimizar custos de preparação
Chen & Askin (2009)	Sequenciamento	Algoritmo de Enumeração Implícito	Maximizar lucros
Ferreira et al. (2009)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística <i>relax-and-fix</i>	Minimizar soma total de custos de estoque, demanda não atendida, preparação de máquinas e preparação de tanques
Toso et al. (2009)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística <i>relax-and-fix</i>	Minimizar custos de estoque, horas extras e preparação
Bernardes et al. (2010)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Cut</i>	Minimizar custos de estoque, atraso e preparação
Stadtler (2010)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Bound</i>	Minimizar custos de estoque e preparação
Henriques et al. (2010)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Bound</i>	Minimizar custos de estoque
Ferreira et al. (2010)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística <i>relax-and-fix</i>	Minimizar soma total de custos de estoque, demanda não atendida e preparação de máquinas
Defalque et al. (2011)	PCP Integrado com Sequenciamento	<i>Branch and Cut</i>	Minimizar custos de estoque, atraso e preparação
Clark et al. (2011)	PCP Integrado com Sequenciamento	-	-
Ramos & Oliveira (2011)	Sequenciamento	Algoritmo Evolutivo Híbrido	Minimizar soma dos custos por antecipação e atraso
Shim et al. (2011)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística Adaptada	Minimizar soma dos custos de preparação e estoque
Stadtler & Sahling (2012)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurística <i>relax-and-fix</i> /Heurística <i>relax-and-optimize</i>	Minimizar custos de estoque, preparação e demanda não atendida
Pinedo (2012)	Sequenciamento	-	-
Rego (2013)	Sequenciamento	Algoritmos Multiobjetivo	Minimizar tempo total de produção e atraso total ponderado
Molina et al. (2013)	Dimensionamento	Relaxação Lagrangeana Modificada	Minimizar os custos de estoque, atraso, preparação e transporte
Seeanner & Meyr (2013)	PCP Integrado com Sequenciamento	Heurísticas <i>relax-and-fix</i> /Heurística <i>LP-and-fix</i>	Minimizar soma dos custos de estoque, preparação, produção, custos de espera, compras externas, horas extras e estoque de produtos em processo

dados para o estudo foi coletada em uma fábrica de cimento para refratário de grande porte localizada em Contagem, Minas Gerais.

O detalhamento do processo produtivo dá maior ênfase às questões operacionais e organizacionais da fábrica e, por meio de uma análise deste, busca-se encontrar incoerências que possam trazer queda de eficiência para a organização. Este processo possui um fluxo linear e pode ser tratado como um problema de uma máquina, sendo a fase de menor velocidade de produção aquela que determina a velocidade do processo. Inicia-se na etapa de recebimento das matérias-primas e finaliza com a expedição do produto final para o cliente.

A fábrica funciona em dois turnos de produção e possui 32 silos disponíveis para armazenagem de insumos, dos quais, 11 silos mantêm as matérias-primas que são comuns para muitos produtos, e os demais silos têm sua matéria-prima trocada de acordo com a necessidade de produção. O recebimento é feito por meio de *bags* que são mantidos em escaninhos próximos à entrada da linha de produção, os quais são abastecidos semanalmente (Figura 2 na seção A).

Os silos, Figura 2 na seção B, são esvaziados após a ordem de produção e abastecidos com as matérias-primas necessárias. O tempo de preparação para a produção de um produto é cerca de 50 minutos, sendo 30 minutos para o descarregamento do silo e 20 minutos para o abastecimento. Ocorre a preparação de uma matéria-prima por vez, já que existe um único equipamento que transporta o material para os silos. Os *bags* com estes materiais são transportados até a entrada dos silos e levados por meio de elevadores até os silos já esvaziados, nos quais estes insumos são ensilados. Cada silo possui 2 000 kg de capacidade. Depois do abastecimento destes, a matéria-prima

é pesada pela moega na quantidade necessária para a formação da receita no carro de transporte, Figura 2 na seção C. Os silos são localizados sobre um carrinho que recebe as matérias-primas após pesadas e as direcionam ao misturador, Figura 2 na seção D, para o posterior ensacamento. A Figura 2 ilustra o processo produtivo da empresa estudada, seguindo o fluxo: escaninho, ensilagem, formação da receita e misturador.

A ensilagem tem um grande impacto no tempo ocioso, dado que, como já descrito anteriormente, gasta cerca de 50 minutos em cada silo. A troca de produtos/família de produtos pode resultar na mudança de matérias-primas em uma grande quantidade de silos; dessa forma, maior será a quantidade de silos que necessitarão de troca, aumentando ainda mais o tempo ocioso. Além disso, produtos/família de produtos que podem causar contaminação aumentam o tempo de preparação, em razão da exigência de uma limpeza adicional. Dessa forma, a ensilagem é determinante no sequenciamento devido a sua influência nos tempos ociosos e na capacidade disponível. Ressalta-se que os dados trabalhados foram rigorosamente gerados para considerar a realidade aqui descrita.

O presente estudo visa criar uma maior integração entre os níveis de decisão tático e operacional, buscando facilitar as atividades de PCP por meio de modelagem matemática. No nível tático, são determinados o dimensionamento de lotes e a sua respectiva data de entrega. No nível operacional, se define o sequenciamento dos produtos/família de produtos. Segundo Loveland et al. (2007), um modelo que comunica as decisões de nível tático e operacional busca estabelecer melhor comunicação e organização do chão de fábrica.

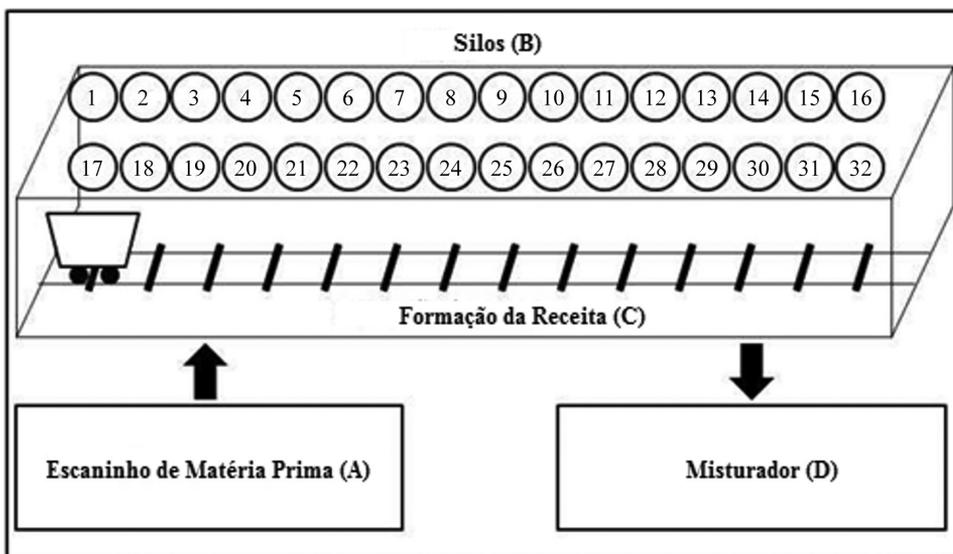


Figura 2. Disposição do processo estudado.

Atualmente o PCP da empresa busca produzir a cada semana somente a demanda prevista para este intervalo de tempo, procurando não acumular estoques de períodos anteriores, mas incorrendo quando necessário na utilização de horas extras. A empresa considera que as incertezas em relação à demanda são relativamente grandes. No entanto, o PCP define somente a necessidade de horas da produção e não considera o tempo gasto no sequenciamento. Este sequenciamento não é planejado no programa inicial, ficando a cargo do nível operacional. Dessa forma, muitos planos de produção definidos pelo PCP se tornam inviáveis no chão de fábrica ou exigem grande quantidade de horas extras. Este é o problema crucial da empresa atualmente. A modelagem proposta deve proporcionar a antecipação da produção nos períodos em que existe capacidade ociosa, além de buscar sequências de produção melhores, ou seja, com menor número de preparações.

A previsão de vendas da fábrica é composta pelas previsões internas e externas. A primeira semana de planejamento possui demandas reais, ao aumentar a distância do período de planejamento, a demanda passa a ser construída de previsões. Todas as demandas são disponibilizadas no sistema integrado de gestão da empresa. Um funcionário executa o sistema para verificar os pedidos, retornando informações relativas ao estoque. Ao final deste processo é possível determinar quanto produzir de cada produto/família de produtos.

A sequência de produção dos lotes é definida em reunião pela equipe do PCP, que, com base em conhecimento tácito, define a sequência para as próximas semanas visando à redução de tempo ocioso e desconsiderando os custos de estocagem. Este processo dispense em torno de 8 horas semanais, porém não garante a otimalidade do sequenciamento da produção, ou seja, não se sabe o quão perto está do resultado ótimo, dado que a sequência proposta somente define o sequenciamento de produção, sem considerar os tempos de preparação. Logo, é necessário realizar cálculos adicionais para verificar a viabilidade do atendimento da demanda e a obediência às datas de entrega.

É interessante salientar que não existe interação entre o nível de decisão tático e o operacional na determinação da quantidade de bens a serem produzidos. Portanto, não há garantia de que a produção definida pelo PCP possa ser sequenciada e fabricada. Os pedidos de vendas são fornecidos pelos estoques de produtos acabados ou, caso não exista o bem em estoque, estes são transformados em ordens de produção. O sequenciamento dessas ordens de produção deve ser realizado respeitando a demanda estabelecida.

A empresa apresenta um índice de 5% do total de ordens sendo entregues em atraso por falta de

capacidade na linha. Atualmente, 20% do tempo de linha disponível é utilizado para preparação de máquinas, desta forma, minimizar este tempo implica aumento da capacidade e redução nos atrasos de entrega. Existe, portanto, a necessidade de criação de um modelo matemático que organize a linha de produção, reduzindo o tempo de preparação e aumentando o tempo para a produção. Este modelo deve buscar a melhor sequência produtiva de forma a minimizar os custos inerentes ao processo.

O PCP optou por trabalhar com um período de planejamento de apenas sete dias, mesmo disponibilizando quatro semanas para o departamento de vendas. Este período foi escolhido com base na confiabilidade da informação, sendo que na semana corrente os pedidos são feitos com base em demandas reais. O departamento de PCP, visando aumentar a produtividade, permite antecipar a produção e atender aos pedidos antes da data prevista, porém isso pode levar a estoque desnecessário.

#### 4 Modelos propostos e método de solução

O presente estudo apresenta três modelos matemáticos de dimensionamento e sequenciamento integrados com o objetivo de minimizar os custos de não atendimento da demanda e estoques, considerando tempos de preparação dependentes da sequência. Estes modelos são: um com variáveis contínuas, uma abordagem de referência com variáveis indexadas no tempo e uma nova formulação proposta pelos autores.

A primeira abordagem, denominada Modelo de Programação Linear Inteira Mista Binária com Horizonte de Tempo Contínuo (MPLIM-HC), é baseada em Manne (1960), Carvalho & Santos (2006) e Santos (2006). Esta formulação apresenta variáveis contínuas, inteiras e binárias e um horizonte de tempo contínuo. A segunda abordagem é baseada nos trabalhos de Toledo et al. (2007), Toso et al. (2009) e Ferreira et al. (2010). Esta formulação é denominada Modelo de Programação Linear Inteira Mista Binária com Horizonte de Tempo Discretizado (MPLIM-HD) e apresenta variáveis indexadas no tempo, com o horizonte de planejamento discretizado em subperíodos. Nesta formulação, o parâmetro  $\bar{s}$  é no máximo igual ao número de famílias de produtos  $\bar{j}$ , então todas as famílias de produtos podem ser produzidas (mas não precisam ser). Por fim, a abordagem proposta, denominada Modelo de Programação Linear Inteira Mista Binária com Horizonte de Tempo Discretizado Proposto (MPLIM-HDP), inspira-se nas formulações apresentadas e nos trabalhos de Sousa & Wolsey (1992) e Henriques et al. (2010).

Os modelos MPLIM-HD e MPLIM-HDP apresentam variáveis indexadas no tempo (horizonte de planejamento discretizado), e, como analisado

por Keha et al. (2009), isso implica limites mais apertados. Na formulação MPLIM-HDP, o tempo é discretizado em  $\bar{s}$  subperíodos com tamanho igual à capacidade de produção em horas disponíveis. Este horizonte de planejamento aumentado leva a um maior número de variáveis e restrições do que o modelo MPLIM-HD e, conseqüentemente, restringe o tamanho das instâncias que podem ser resolvidas.

Keha et al. (2009) e Unlu & Mason (2010) mostraram que os limites inferiores obtidos a partir das formulações baseadas na proposta de Sousa & Wolsey (1992) eram apertados, mas as relaxações são de difícil resolução quando comparadas às outras formulações. Contudo, os experimentos computacionais de De Paula et al. (2010) sugerem que, quando os tempos de preparação dependentes da sequência são introduzidos, os limites gerados pela relaxação linear nas formulações indexadas no tempo não são tão apertados. Nogueira (2014) evidencia este fato e propõe uma família de inequações válidas para melhorar os limites inferiores obtidos com tempos de preparação dependentes da sequência. Além disso, o autor explica que, quando o número de produtos ou o tamanho do horizonte de planejamento aumenta, os modelos matemáticos não conseguem resolver os problemas em um *solver* comercial.

#### 4.1 Modelagem do problema

Os modelos MPLIM-HC e MPLIM-HD são baseados em Manne (1960), Carvalho & Santos (2006), Santos (2006), Toledo et al. (2007), Toso et al. (2009) e Ferreira et al. (2010). O modelo MPLIM-HDP é uma nova proposta, inspirada nos trabalhos de Sousa & Wolsey (1992) e Henriques et al. (2010). Todos os modelos respeitam as seguintes considerações: *i*) o problema estudado é tratado como um problema de uma máquina, considerando-se a estratégia do horizonte rolante; *ii*) os lotes de produção têm tamanhos diferentes e sua sequência impacta o tempo total gasto nas preparações. Quando não há risco de contaminação entre famílias de produtos, o tempo de preparação é curto, caso contrário é longo e compromete o tempo total disponível para produção. Os conjuntos para os modelos são:

- $J$  refere-se ao conjunto de famílias de produtos a serem produzidas, com  $J = \{1, \dots, \bar{J}\}$ .
- $T$  refere-se ao conjunto de períodos no horizonte de planejamento, com  $T = \{1, \dots, \bar{T}\}$ .
- $S$  refere-se ao conjunto de subperíodos no horizonte de planejamento, com  $S = \{1, \dots, \bar{s}\}$ .

Os índices utilizados nos modelos matemáticos são:

- $i$  refere-se à família de produtos considerada, sendo que  $i \in J$ .

- $t$  indica o período do horizonte de planejamento considerado, sendo que  $t \in T$ .
- $s$  indica o subperíodo do horizonte de planejamento considerado, sendo que  $s \in S$ .

Os parâmetros considerados para os modelos são:

- $d_{it}$ : Demanda da família de produtos  $i$  no período  $t$ .
- $S_{mi}$ : Tempo mínimo de preparação para produzir a família de produtos  $i$ .
- $p_i$ : Tempo de produção da família de produtos  $i$ .
- $C_t$ : Capacidade total em horas no período  $t$ .
- $St_{ij}$ : Tempo de preparação para troca da família de produtos  $i$  para a família de produtos  $j$ .
- $H_i$ : Custo de estoque da família de produtos  $i$ .
- $B_i$ : Custo de não atendimento da demanda da família de produtos  $i$ .
- $M$ : Valor grande, sendo este dado pelo tempo total gasto para produzir toda a demanda da primeira semana de planejamento, acrescido dos tempos máximos gastos para preparação da produção da família de produtos  $i$  para a família de produtos  $j$ , como pode ser visto em Nogueira (2014), sendo este dado por:

$$M = \sum_{i \in J} (p_i d_{i1}) + \sum_{i \in J} \max_{j \in J} St_{ij}. \quad (1)$$

As variáveis de decisão utilizadas nos modelos são:

- $I_{it}$ : Variável Contínua que indica a quantidade em estoque da família de produtos  $i$  no período  $t$ .
- $q_{it}$ : Variável Contínua que indica a quantidade produzida da família de produtos  $i$  no período  $t$ .
- $I_{it}^-$ : Variável Contínua que indica a quantidade de demanda não atendida da família de produtos  $i$  no período  $t$ .
- $r_i$ : Variável Contínua que indica o tempo de início da produção da família de produtos  $i$ .
- $\beta_{ijs}$ : Variável Binária que indica a produção ( $\beta_{ijs} = 1$ ) ou não ( $\beta_{ijs} = 0$ ) da família de produtos  $j$  após a produção da família de produtos  $i$  no subperíodo  $s$ .
- $v_{it}$ : Variável Binária que indica a produção ( $v_{it} = 1$ ) ou não ( $v_{it} = 0$ ) da família de produtos  $i$  no período  $t$ .

- $x_{is}$ : Variável Binária que indica a produção ( $x_{is} = 1$ ) ou não ( $x_{is} = 0$ ) da família de produtos  $i$  no subperíodo  $s$ .
- $y_{ij}$ : Variável Binária que indica a produção ( $y_{ij} = 1$ ) ou não ( $y_{ij} = 0$ ) da família de produtos  $j$  após a produção da família de produtos  $i$ .

#### 4.1.1 MPLIM-HC – modelo de programação linear inteira mista binária com horizonte de tempo contínuo

O modelo é evidenciado abaixo:

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in J, t \in T} (H_i I_{it} + B_i I_{it}^-) \quad (2)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + q_{it} - d_{it} + I_{it}^- \quad \forall i \in J, \forall t \in T, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in J} (v_{it} S m_i + q_{it} p_i) \leq C_t \quad \forall t = 2 \dots \bar{T}, \quad (4)$$

$$q_{it} p_i \leq C_t v_{it} \quad \forall i \in J, \forall t = 2 \dots \bar{T}, \quad (5)$$

$$r_j \geq r_i + S t_{ij} v_{i1} + p_i q_{i1} - M(1 - y_{ij}) \quad \forall i \in J, \forall j \in J, i \neq j, \quad (6)$$

$$y_{ij} + y_{ji} = 1 \quad \forall i \in J, \forall j \in J, i \neq j, \quad (7)$$

$$r_i + p_i q_{i1} \leq C_1 v_{i1} \quad \forall i \in J, \quad (8)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J, \forall j \in J, i \neq j, \quad (9)$$

$$v_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J, \forall t \in T, \quad (10)$$

$$q_{it}, I_{it}^-, I_{it} \geq 0 \quad \forall i \in J, \forall t \in T, \quad (11)$$

$$r_i \geq 0 \quad \forall i \in J. \quad (12)$$

O problema tem como objetivo a minimização dos custos de estoque e de não atendimento da demanda, como mostrado na Restrição 2. Na Expressão 3, temos a restrição de balanceamento da linha em que a quantidade de estoque  $I_{it}$  da família de produtos  $i$  ao fim do período  $t$  é igual ao estoque do período anterior  $I_{i,t-1}$  acrescido da produção do período  $t$ ,  $q_{it}$ , e da demanda não atendida do mesmo período  $I_{it}^-$ , reduzindo-se a quantidade demandada  $d_{it}$ . A Restrição 4 limita a capacidade da fábrica, mostrando que a quantidade mínima de horas de preparação  $\sum_{i \in J} (v_{it} S m_i)$  somada ao tempo total de produção  $\sum_{i \in J} (q_{it} p_i)$  da família de produtos  $i$  deve ser inferior à capacidade de tempo total da fábrica  $C_t$ , a partir do período 2. Se a família de produtos  $i$  é produzida no período  $t$ , o tempo total gasto  $q_{it} p_i$  para sua produção deve ser menor que a capacidade total de tempo da fábrica

$C_t v_{it}$ , como mostrado na Restrição 5, sendo esta válida a partir do segundo período de planejamento. A Restrição 6 impõe que a data de início de produção da família de produtos  $j$  é equivalente à data de início  $r_i$  de produção da família de produtos  $i$  mais o tempo gasto de preparação para a troca da família de produtos  $i$  para a  $j$   $S t_{ij} v_{i1}$  somado à quantidade total de tempo de produção da família de produtos  $i$  no primeiro período de tempo,  $p_i q_{i1}$ . Nota-se que  $r_j$  deve obedecer a essa expressão quando a produção da família de produtos  $j$  ocorre após a produção da família de produtos  $i$  ( $y_{ij} = 1$ ). Caso contrário, ( $y_{ij} = 0$ ), a Expressão 6 terá uma subtração de um valor muito grande, denotado por  $M$ , de forma que não restringirá a quantidade  $r_j$ . A Restrição 7 afirma que, em um determinado intervalo de tempo, existirá troca da família de produtos  $i$  para a  $j$  ou o contrário, ou seja, só haverá uma troca durante este período. Na Restrição 8, é possível verificar que o tempo de início de produção de  $i$  mais o tempo gasto para produzir esta família de produtos deve ser inferior à capacidade do período 1, se a família de produtos  $i$  for produzida neste período. As Restrições 9, 10, 11 e 12 definem os domínios das variáveis.

#### 4.1.2 MPLIM-HD – modelo de programação linear inteira mista binária com horizonte de tempo discretizado

A seguir, a modelagem para esta formulação.

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in J, t \in T} (H_i I_{it} + B_i I_{it}^-) \quad (13)$$

Sujeito a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + q_{it} - d_{it} + I_{it}^- \quad \forall i \in J, \forall t \in T, \quad (14)$$

$$\sum_{i \in J} (v_{it} S m_i + q_{it} p_i) \leq C_t \quad \forall t = 2 \dots \bar{T}, \quad (15)$$

$$\sum_{i \in J, j \in J, s \in S, i \neq j} (\beta_{ijs} S t_{ij}) + \sum_{i \in J} (q_{i1} p_i) \leq C_1, \quad (16)$$

$$q_{it} p_i \leq C_t v_{it} \quad \forall i \in J, \forall t = 2 \dots \bar{T}, \quad (17)$$

$$q_{i1} p_i \leq C_1 \sum_{s \in S} x_{is} \quad \forall i \in J, \quad (18)$$

$$\sum_{i \in J} x_{is} = 1 \quad \forall s \in S, \quad (19)$$

$$\beta_{ijs} \geq x_{i,s-1} + x_{js} - 1 \quad \forall i \in J, \forall j \in J, \forall s = 2 \dots \bar{s}, i \neq j, \quad (20)$$

$$\beta_{ijs} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J, \forall j \in J, \forall s \in S, i \neq j, \quad (21)$$

$$v_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J, \forall t \in T, \quad (22)$$

$$x_{is} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in J, \forall s \in S, \quad (23)$$

$$q_{it}, I_{it}^-, I_{it} \geq 0 \forall i \in J, \forall t \in T. \tag{24}$$

A função objetivo mostrada na Restrição 13 é a mesma já abordada na Restrição 2, assim como as Restrições 14 e 15, que possuem o mesmo significado das Restrições 3 e 4, respectivamente. Dada a produção em subperíodos, a preparação da linha de produção é requerida quando a produção de uma família de produtos  $j$  no subperíodo  $s$  se inicia após o término da produção da família de produtos  $i$ , considerando uma capacidade total em tempo produtivo no primeiro período de planejamento,  $C_1$ , a soma dos tempos de preparação e tempos de produção, como mostrado na Expressão 16. A Restrição 17 evidencia que o tempo para a produção de cada família de produtos  $i$  em um determinado período de tempo deve ser inferior à capacidade total em tempo  $C_t$  no período  $t$ . Na Restrição 18, temos que se a família de produtos  $i$  é produzida no período 1 seu tempo de produção deve ser inferior à capacidade neste período. A Restrição 19 mostra que somente uma família de produtos deverá ser produzida por subperíodo  $s$ . A Restrição 20 mostra que só haverá produção da família de produtos  $j$  após a produção da família de produtos  $i$  no subperíodo  $s$  se houver produção de  $i$  no subperíodo  $s-1$  e produção de  $j$  no subperíodo  $s$ , ou seja, haverá troca na família de produtos  $i$  para a família de produtos  $j$ . As Expressões 21, 22, 23 e 24 definem os domínios das variáveis.

**4.1.3 MPLIM-HDP – modelo de programação linear inteira mista binária com horizonte de tempo discretizado proposto**

O modelo proposto, como mencionado anteriormente, é baseado em Sousa & Wolsey (1992) e Henriques et al. (2010). Esta é uma nova formulação, inspirada por problemas de sequenciamento, no entanto requerendo configurações e definições particulares. Para esta formulação um novo parâmetro é necessário:

- $a_t$ : Taxa de produção da família de produtos  $i$  em cada subperíodo.

São também utilizadas as novas variáveis:

- $z_{is}$ : Variável Binária indicando o início ( $z_{is} = 1$ ) ou não ( $z_{is} = 0$ ) da produção da família de produtos  $i$  no subperíodo  $s$ .
- $w_{is}$ : Variável Binária indicando o término ( $w_{is} = 1$ ) ou não ( $w_{is} = 0$ ) da produção da família de produtos  $i$  no subperíodo  $s$ .

O modelo proposto é apresentado abaixo.

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in J, t \in T} (H_t I_{it} + B_t I_{it}^-) \tag{25}$$

*Sujeito a:*

$$I_{i,t-1} + q_{it} + I_{it}^- = d_{it} + I_{it} \forall i \in J, \forall t \in T, \tag{26}$$

$$\sum_{i \in J} (v_{it} S m_i + q_{it} p_i) \leq C_t \forall t = 2 \dots \bar{T}, \tag{27}$$

$$q_{it} p_i \leq C_t v_{it} \forall i \in J, \forall t = 2 \dots \bar{T}, \tag{28}$$

$$q_{it} = a_i \left( \sum_{s \in S} s w_{is} - \sum_{s \in S} s z_{is} + \sum_{s \in S} z_{is} \right) \forall i \in J, \tag{29}$$

$$\sum_{s \in S} w_{is} = \sum_{s \in S} z_{is} \forall i \in J, \tag{30}$$

$$\sum_{s \in S} z_{is} \leq 1 \forall i \in J, \tag{31}$$

$$w_{is} + \sum_{ss=s}^{\min(s+S_j+p_i-1, \bar{s})} z_{js} \leq 1 \forall s \in S, \forall i \in J, \forall j \in J, i \neq j, \tag{32}$$

$$\sum_{s=1}^{s2} w_{is} \geq z_{i,s1} + z_{j,s2} - 1 \forall i \in J, \forall j \in J, \forall s1 \in S, \forall s2 \in S, s2 \geq s1, i \neq j, \tag{33}$$

$$\sum_{s=1}^{s2} z_{is} \geq w_{j,s1} + w_{i,s2} - 1 \forall i \in J, \forall j \in J, \forall s1 \in S, \forall s2 \in S, s2 \geq s1, i \neq j, \tag{34}$$

$$w_{is}, z_{is} \in \{0, 1\} \forall i \in J, \forall s \in S, \tag{35}$$

$$v_{it} \in \{0, 1\} \forall i \in J, \forall t \in T, \tag{36}$$

$$q_{it}, I_{it}^-, I_{it} \geq 0 \forall i \in J, \forall t \in T. \tag{37}$$

As Restrições 25, 26, 27 e 28 possuem o mesmo significado que as Restrições 2, 3, 4 e 5, respectivamente. A quantidade a ser produzida da família de produtos  $i$  no primeiro período é dada pela Restrição 29, em que esta quantidade é calculada com base no tempo gasto e na taxa de produção,  $a_t$ . A Restrição 30 garante que toda família de produtos  $i$  que tem sua produção iniciada deve ser terminada, garantindo o fim do processamento de todos os itens iniciados. A Restrição 31 determina que cada família de produtos tem sua produção iniciada somente uma única vez em todos os subperíodos  $s$ . A Restrição 32 garante que se a família de produtos  $i$  está alocada no subperíodo  $s$ , então nenhuma outra família de produtos  $j$  pode ser alocada até o término desse subperíodo, respeitando a capacidade total da primeira semana de planejamento. Na Restrição 33, é definido que entre dois inícios de produção sempre existirá um término, e a Restrição 34 determina que entre dois termos de produção sempre existirá um início. As Restrições 35, 36 e 37 apresentam os domínios das variáveis.

O modelo proposto, MPLIM-HDP, apresenta uma homogeneidade no tempo de seus subperíodos, dado que a duração destes não depende do *lead time* de cada família de produtos. Sendo assim, diretamente pelos

valores das variáveis  $z_{is}$  e  $w_{is}$  é possível determinar a posição cronológica de certa família de produtos, bem como a relação de precedência de toda a produção.

Tanto o MPLIM-HC quanto o MPLIM-HD evidenciam somente a data de início da produção de cada família de produtos, não havendo um detalhamento temporal durante a fabricação. Tal fato impõe que a produção de toda demanda de determinada família de produtos ocorra uma só vez no período. Além disso, deve-se atentar ao fato de que o MPLIM-HC apresenta o parâmetro  $M$ , um número grande, que geralmente é determinado arbitrariamente, piorando os limites obtidos.

Como os dois primeiros modelos apresentados, este último limita pela Restrição 31 que, em todos os subperíodos, uma família de produtos inicie sua produção somente uma vez. Tal premissa foi adotada para que o MPLIM-HDP possuísse as mesmas características dos demais modelos aqui abordados. Porém, se a mesma for suprimida, o modelo possui a liberdade de realizar interrupção na produção de uma família de produtos para começar outra e, quando possível, completar a produção da primeira, caracterizando o *preemptive scheduling*.

Analisando os problemas de PCP, essa característica pode beneficiar os gestores a adaptar a produção mais facilmente às demandas inesperadas e urgentes de alguns produtos. Assim, a produção destes pode ser priorizada sem comprometer os sequenciamentos restantes. A imposição de que toda a quantidade necessária de um produto/família de produtos deve ser fabricada em uma única vez por período pode gerar algumas complicações práticas.

## 5 Resultados computacionais

São realizados extensivos experimentos computacionais para identificar a força e as fraquezas de cada formulação proposta como ferramenta de suporte à tomada de decisão. A fim de analisar o desempenho das formulações matemáticas, os mesmos parâmetros serão variados. Um *benchmark* específico incluindo estas diferentes funcionalidades e características foi criado para este propósito.

### 5.1 Benchmarking

Três diferentes classes de instâncias são criadas baseadas em dados reais. Todas as classes de instâncias têm um horizonte de planejamento de quatro semanas. No modelo MPLIM-HDP, cada semana é dividida

em 112 subperíodos de 1 hora (2 turnos de 8 horas para cada dia da semana). No modelo MPLIM-HD, cada semana é dividida em uma quantidade igual ao número de famílias de produtos a serem produzidas. Portanto, neste modelo, o tamanho de cada subperíodo é flexível, ou seja, irá sempre depender do número de famílias de produtos que serão produzidas em cada semana. Para todos os modelos, foram consideradas as seguintes quantidades distintas de famílias de produtos: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15 e 20. Além disso, o estoque de qualquer família de produtos no início do horizonte de planejamento é zero.

Todos os parâmetros das instâncias são gerados randomicamente por meio de uma distribuição uniforme e seus valores mínimo e máximo são baseados em uma escala específica de parâmetros listada na Tabela 2. O parâmetro  $\bar{j}$  se refere ao número total de famílias de produtos em  $J$ . Os valores da demanda de cada família, os tempos de processamento, os tempos de preparação, custos de estoque e de demanda não atendida são baseados em dados reais. A demanda de cada família é gerada de maneiras diferentes (Classes 1, 2 e 3) para capturar vários aspectos de situações reais e suas influências. A quantidade é gerada por um parâmetro  $\alpha_l$  com valores 0,75, 1,50 e 3,00 para cada classe, respectivamente. Para cada classe, também são consideradas três instâncias independentes com tamanho  $\bar{j} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 20\}$ . Logo, 81 instâncias são randômica e independentemente geradas. Todas as instâncias são levemente modificadas para satisfazer a desigualdade triangular ( $St_{ij} \leq St_{il} + St_{lj} \forall i \in J, \forall j \in J, \forall l \in J, i \neq j \neq l$ ). O valor  $M$  foi definido pela Equação 1.

### 5.2 Resultados

As formulações matemáticas foram modeladas e resolvidas usando o AMPL e CPLEX 12.1 com configurações padrão. Os experimentos foram rodados em um computador com sistema operacional *Windows 7* com um único processador 2.2 GHz e 4GB de memória. Os experimentos foram concluídos após uma hora de tempo de CPU.

#### 5.2.1 Resultados específicos

##### 5.2.1.1 Validação das soluções dos modelos

Com o objetivo de avaliar e comparar a solução dos três modelos, esta seção tem como objetivo analisar as soluções de cada um, tendo como entrada os mesmos

Tabela 2. Valores das distribuições das instâncias.

Dados de Entrada	Valores da Distribuição
Tempo de Processamento ( $p_i$ ) – Horas	$U(1, 4)$
Tempo de Preparação ( $St_{ij}$ ) – Horas	$U(0, 2)$
Demanda ( $d_{it}$ ) – Unidades	$U(0, 5 \alpha_l)$
Custo ( $H_i$ e $B_i$ ) – R\$	$U(0, \bar{j})$

dados. Primeiramente foi escolhida uma instância com três famílias de produtos a serem fabricadas, contendo 4 subperíodos. Todos os modelos conseguiram chegar ao resultado ótimo e os tempos de resolução para os modelos MPLIM-HC, MPLIM-HD e MPLIM-HDP foram, respectivamente, 0,05, 0,55 e 68,25 segundos.

As variáveis de dimensionamento obtêm resultados idênticos para os três modelos, satisfazendo a demanda sem a geração de estoques ou demanda não atendida. No entanto, estes modelos apresentam diferentes soluções para o sequenciamento do primeiro período para a mesma instância do problema, ressaltando as diferenças entre os modelos.

Para o MPLIM-HC, a seqüência das famílias de produtos é 2-3-1, com datas de início de produção ( $r_i$ ) 0, 30 e 38. Neste modelo, é possível identificar diretamente pelas variáveis de decisão o sequenciamento e as datas de início de produção. Apesar de não haver complexidade nestes cálculos, é notório que este modelo necessita de procedimentos auxiliares para identificar os termos de produção.

O MPLIM-HD apresenta o sequenciamento ótimo 3-1-2. A solução mostra o número de subperíodos iguais à quantidade de famílias de produtos, embora não exista noção temporal sobre o início e término de fabricação de cada família de produtos. Novamente, este modelo também necessita de procedimentos auxiliares para fornecer maior detalhamento da solução.

Para o MPLIM-HDP, o sequenciamento das famílias de produtos é 2-1-3, sendo suas datas de início ( $z_{is}$ ) e fim ( $w_{is}$ ): 3 e 30, 45 e 96, 106 e 111, respectivamente. As variáveis de decisão permitem uma noção temporal do sequenciamento, e, por elas, fica evidente que a solução apresenta uma folga, logo, se necessário, mais famílias de produtos podem ser adicionadas para o primeiro período.

O modelo MPLIM-HDP possui maior tempo de resolução do que os outros modelos, no entanto a eliminação da Restrição 31, como já mencionado, permite o *preemptive scheduling*. Isto proporciona flexibilidade para iniciar e concluir a produção de uma família de produtos mais de uma vez num mesmo período. Esta opção pode ser usada para antecipar a produção de períodos subsequentes, se o custo de não atendimento da demanda é superior ao custo de estoque gerado.

### 5.2.1.2 Comparação com resultados da empresa

Como já comentado, a empresa determina o sequenciamento das famílias a serem produzidas apenas para a primeira semana do horizonte de planejamento, não adiantando a produção das próximas semanas, preferindo incorrer em horas extras quando necessário. Esta prática pode causar ociosidade na linha de produção e demandas não atendidas.

O presente estudo visa definir modelos matemáticos que permitam que a empresa estudada antecipe a produção de outras semanas para períodos anteriores com ociosidade, reduzindo os custos de demanda não atendida e atrasos na entrega. Além disso, as previsões para períodos mais distantes são susceptíveis a mudar uma vez que o horizonte é rolado para frente e gerentes geralmente têm que revisar os planos para lidar com eventos inesperados. Para isso, o planejamento da produção deve ser feito considerando o horizonte rolante, sequenciando as famílias de produtos para a primeira semana e apenas definindo o tamanho dos lotes para as semanas restantes.

De forma geral, os modelos matemáticos apresentam um atraso médio de 0% para as famílias de produtos para as classes de instâncias 1 e 2 e 7% para a Classe 3, sendo que a última possui demanda mais apertada em relação às demais classes. O atraso médio total apresentado pelos modelos é aproximadamente 2%, enquanto o atraso médio histórico da empresa é 4%. Ressalta-se que os dados são baseados nos valores históricos reais da empresa, porém não há garantia de que o comportamento apresentado pelos modelos matemáticos seja exatamente idêntico aos resultados reais da empresa, mesmo que as instâncias utilizadas no presente estudo tenham sido baseadas em dados históricos reais.

## 5.2.2 Resultados gerais – avaliação da performance dos modelos

Para analisar as diferenças entre os modelos, foi comparado o *GAP* de otimalidade ( $GAP_{Inteiro}$ ) dentro de 3 600 segundos, o *GAP* da relaxação linear, os tempos de CPU e suas dimensões. O *GAP* da relaxação linear ( $GAP_{Relax}$ ) é definido como a diferença relativa entre a melhor solução inteira encontrada para cada instância e o valor da relaxação linear, dividido pela melhor solução inteira. Os resultados dos experimentos e análise são apresentados nas Tabelas 3 e 4. A Tabela 3 mostra os resultados para o *GAP* médio e as médias para os tempos computacionais para os modelos apresentados considerando cada classe de instância do problema, enquanto que a Tabela 4 mostra as dimensões dos modelos.

Na Tabela 3, as primeiras duas colunas se referem às classes de instâncias e o número de famílias de produtos. Para cada classe de instância, sua média e seu desvio padrão são calculados. O  $T_{Relax}$  e  $T_{Inteiro}$  indicam os tempos médios de CPU para a relaxação linear e para o problema de programação inteira mista, respectivamente. A coluna “% Inst. Resol.” indica o percentual de instâncias resolvidas dentro de 3 600 segundos para a relaxação linear e para o problema de programação inteira mista.

Como um exemplo, a “Classe 1” e “Família de Produtos 20” na Tabela 3 indicam que 20 famílias

Tabela 3. Resultados referentes a cada classe e a cada família de produtos para os modelos MPLIM-HC, MPLIM-HD E MPLIM-HDHP.

Classe	Família de Produtos	MPLIM-HC				MPLIM-HD				MPLIM-HDHP					
		$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol
1	2	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,8	0,0%	0,0%	100,0%
1	3	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	2,4	0,0%	0,0%	100,0%
1	4	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	5,2	0,0%	0,0%	100,0%
1	5	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	9,0	0,0%	0,0%	100,0%
1	6	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	15,2	0,0%	0,0%	100,0%
1	7	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	20,9	0,0%	0,0%	100,0%
1	10	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	-	0,0%	0,0%	100,0%
1	15	99,9%	100,0%	3600,0	84,8%	0,1	100,0%	40,0%	1212,9	67,0%	0,0%	-	0,0%	0,0%	100,0%
1	20	99,9%	100,0%	3600,0	57,6%	0,2	100,0%	26,0%	3600,0	0,0%	0,0%	-	0,0%	0,0%	100,0%
<b>Média</b>		<b>99,9%</b>	<b>100,0%</b>	<b>800,1</b>	<b>15,8%</b>	<b>0,1</b>	<b>100,0%</b>	<b>7,3%</b>	<b>534,8</b>	<b>85,0%</b>	<b>0,0%</b>	<b>8,9</b>	<b>0,0%</b>	<b>0,0%</b>	<b>44,0%</b>
<b>Desvio Padrão</b>		<b>0,0%</b>	<b>0,0</b>	<b>1587,4</b>	<b>32,1%</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>15,0</b>	<b>1217,4</b>	<b>0,3</b>	<b>0,0%</b>	<b>7,8</b>	<b>0,5</b>	<b>0,0%</b>	<b>0,5</b>
Classe	Família de Produtos	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol
2	2	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,0	0,0%	0,0%	100,0%	0,8	0,0%	0,0%	100,0%
2	3	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	2,4	0,0%	5,0%	100,0%
2	4	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	5,1	0,0%	0,0%	100,0%
2	5	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	9,0	0,0%	0,0%	100,0%
2	6	33,3%	100,0%	0,1	0,0%	33,3%	100,0%	0,1	0,0%	33,3%	100,0%	14,2	0,0%	-	0,0%
2	7	33,3%	100,0%	0,3	0,0%	33,3%	100,0%	0,7	0,0%	33,3%	100,0%	20,3	0,0%	-	0,0%
2	10	99,9%	100,0%	3600,0	41,5%	0,1	100,0%	2026,0	7,7%	67,0%	0,0%	-	0,0%	-	0,0%
2	15	99,9%	100,0%	3600,0	12,6%	0,1	100,0%	4,3%	3600,0	0,0%	0,0%	-	0,0%	-	0,0%
2	20	99,9%	100,0%	3600,0	7,9%	0,1	100,0%	3,0%	3600,0	0,0%	0,0%	-	0,0%	-	0,0%
<b>Média</b>		<b>40,7%</b>	<b>100,0%</b>	<b>1200,1</b>	<b>14,3%</b>	<b>0,1</b>	<b>100,0%</b>	<b>1025,2</b>	<b>74,0%</b>	<b>11,1%</b>	<b>8,6</b>	<b>226,9</b>	<b>8,6</b>	<b>1,3%</b>	<b>44,0%</b>
<b>Desvio Padrão</b>		<b>46,4%</b>	<b>0,0</b>	<b>1799,9</b>	<b>17,1%</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>1603,3</b>	<b>0,4</b>	<b>17,2%</b>	<b>7,5</b>	<b>251,5</b>	<b>7,5</b>	<b>2,5%</b>	<b>0,5</b>
Classe	Família de Produtos	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol	$\overline{T}_{Inmetro}$	$\overline{T}_{Relax}$	$\overline{GAP}_{Relax}$	% Ins. Resol
3	2	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	0,8	0,0%	0,0%	100,0%
3	3	0,0%	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	0,1	0,0%	0,0%	100,0%	2,4	0,0%	0,0%	100,0%
3	4	33,2%	100,0%	0,5	2,3%	0,1	100,0%	3,4	0,0%	2,3%	100,0%	5,0	0,0%	33,3%	67,0%
3	5	75,6%	100,0%	3,3	39,4%	0,1	100,0%	131,0	0,0%	39,4%	100,0%	9,1	0,0%	32,0%	33,0%
3	6	99,9%	100,0%	6,2	18,0%	0,1	100,0%	2,5	0,0%	18,0%	100,0%	14,7	0,0%	-	0,0%
3	7	99,8%	100,0%	51,7	6,6%	0,1	100,0%	82,9	0,0%	6,6%	100,0%	21,1	0,0%	-	0,0%
3	10	99,9%	100,0%	3261,8	4,2%	0,2	100,0%	2876,3	0,7%	4,2%	33,0%	-	0,0%	-	0,0%
3	15	99,8%	100,0%	3600,0	3,0%	0,1	100,0%	3600,0	0,7%	3,0%	0,0%	-	0,0%	-	0,0%
3	20	99,8%	100,0%	3600,0	1,6%	0,1	100,0%	3600,0	0,7%	1,6%	0,0%	-	0,0%	-	0,0%
<b>Média</b>		<b>67,6%</b>	<b>100,0%</b>	<b>1169,3</b>	<b>8,3%</b>	<b>0,1</b>	<b>100,0%</b>	<b>1144,0</b>	<b>70,0%</b>	<b>11,0%</b>	<b>8,8</b>	<b>996,2</b>	<b>8,8</b>	<b>16,3%</b>	<b>33,0%</b>
<b>Desvio Padrão</b>		<b>44,1%</b>	<b>0,0</b>	<b>1741,3</b>	<b>12,9%</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>1674,7</b>	<b>0,5</b>	<b>15,4%</b>	<b>7,8</b>	<b>1707,4</b>	<b>7,8</b>	<b>18,9%</b>	<b>0,4</b>
<b>Desvio Padrão do Modelo</b>		<b>69,4%</b>	<b>100,0%</b>	<b>1056,5</b>	<b>12,8%</b>	<b>0,1</b>	<b>100,0%</b>	<b>901,4</b>	<b>77,0%</b>	<b>7,4%</b>	<b>8,8</b>	<b>448,0</b>	<b>8,8</b>	<b>5,9%</b>	<b>41,0%</b>
		<b>26,2%</b>	<b>0,0</b>	<b>109,8</b>	<b>10,1%</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>246,0</b>	<b>0,1</b>	<b>9,5%</b>	<b>0,2</b>	<b>875,8</b>	<b>0,2</b>	<b>10,2%</b>	<b>0,0</b>

de produtos distintas são consideradas, com suas características definidas pela “Classe 1” na “Seção 5.1”. Portanto, como apresentado anteriormente, três resultados foram gerados para a “Classe 1” e “Família de Produtos 20” e suas médias para o *GAP* e tempo computacional são calculadas. Além disso, as médias e desvio padrão são calculados para cada classe de instância para comparar o desempenho dos modelos.

Para as classes de instância 1 e 2 até 5 famílias de produtos, todos os modelos analisados têm *GAP* próximo de 0%, considerando que eles conseguiram resolver na otimalidade a maioria dos casos, para os problemas relaxado e inteiro. Observa-se também um reduzido tempo computacional, o que justifica o uso destes modelos para um pequeno número de famílias de produtos. Na Classe 3, a relaxação linear dos modelos matemáticos apresenta valores maiores para o *GAP* do que as classes 1 e 2. O maior *GAP<sub>Relax</sub>* é apresentado pelo modelo MPLIM-HC com valor de 75,6%, no entanto este modelo possui tempo computacional próximo de 0 segundos para todas as instâncias. Os resultados da Classe 3 eram esperados por possuir demanda mais apertada do que as outras classes.

Para as classes de instâncias maiores que 5 famílias de produtos, o modelo inteiro misto MPLIM-HD possui *GAP* próximo de 0% para todos os problemas. Por outro lado, para grandes instâncias do problema, o MPLIM-HC apresenta piores limites inferiores do que o MPLIM-HD. O MPLIM-HC possui valores para o *GAP* próximos a 100% com tempo computacional similar ao MPLIM-HD. A relaxação linear também apresenta *GAPs* similares para o problema inteiro misto, tendo poucas instâncias com soluções próximas ao ótimo.

Os modelos MPLIM-HC, MPLIM-HD e MPLIM-HDP resolvem 100%, 100% e 67% das instâncias de problemas para a relaxação linear, respectivamente, e 72%, 77% e 41% para os modelos de programação inteira mista. À medida que o tamanho dos dados de entrada aumenta, o *GAP* e o tempo computacional aumentam rapidamente para o modelo MPLIM-HDP, resolvendo um menor número de instâncias para a relaxação linear e problema inteiro do que as outras formulações. Isto é devido ao número de restrições e variáveis associadas ao MPLIM-HDP, os quais aumentam o tamanho do modelo mais rápido do que os outros modelos. Deve-se ressaltar que em muitas ocasiões o modelo foi incapaz de carregar todo o problema no *solver*. Nestes casos, o *GAP* e o tempo computacional foram definidos como “-”.

A Tabela 4 apresenta a ordem de complexidade para cada modelo. Para os modelos, “Variáveis Binárias” indica o número de variáveis associadas, e “Restrições”, o número de restrições associadas.

O modelo MPLIM-HD apresenta em seu pior caso,  $\bar{s} = \bar{j}$ , logo, sua representação é somente

**Tabela 4.** Ordem de complexidade para cada modelo.

Modelo	Variáveis Binárias	Restrições
MPLIM-HC	$O(\bar{j}^2)$	$O(\bar{j}^2)$
MPLIM-HD	$O(\bar{j}^3)$	$O(\bar{j}^3)$
MPLIM-HDP	$O(\bar{j}\bar{s})$	$O(\bar{j}^2\bar{s}^2)$

em função de  $\bar{j}$  na Tabela 4. A complexidade dos modelos MPLIM-HC e MPLIM-HD neste artigo tem um número polinomial de restrições e variáveis nos dados de entrada. Entretanto, este não é o caso do MPLIM-HDP, já que este é fortemente dependente de  $\bar{j}$  e  $\bar{s}$ . Ressalta-se que como  $\bar{s} \gg \bar{j}$ ,  $\bar{s} \propto \bar{j}$  (ver Keha et al. (2009) para mais detalhes), logo, o tamanho do modelo MPLIM-HDP crescerá mais rápido do que os outros modelos. Neste artigo, o tamanho de  $\bar{s}$  foi definido na “Seção 5.1”.

Como pode ser visto na Tabela 4, o MPLIM-HC tem um menor número de restrições e variáveis do que os outros modelos apresentados. O MPLIM-HD tem um número idêntico de variáveis com um número levemente maior de restrições do que o MPLIM-HC. Finalmente, o modelo MPLIM-HDP tem um número consideravelmente maior de restrições e variáveis, devido a  $\bar{s} \gg \bar{j}$ , ou seja, o número de subperíodos é muito maior do que o número de famílias de produtos, requerendo muito espaço na memória.

## 6 Conclusão

O MPLIM-HDP, utilizando-se de dados aleatórios baseados em dados reais, apresentou resultados satisfatórios, representando adequadamente o processo de tomada de decisão. Além disso, ressaltamos a possibilidade de *preemptive scheduling*, permitindo maior flexibilidade na produção das famílias de produtos. Esta flexibilidade permite que, num mesmo horizonte de tempo, uma família de produtos possa ser iniciada e concluída mais de uma única vez, dependendo dos custos de demanda não atendida e estoques. Desta forma, este modelo possui um diferencial importante na geração do sequenciamento da produção em relação aos modelos que não permitem *preemptive scheduling*.

Com os resultados obtidos, foi possível perceber que o modelo MPLIM-HC apresentou facilidade de resolução, em razão de possuir um número menor de restrições e variáveis, porém apresentou limites mais fracos em comparação com os outros modelos. O modelo MPLIM-HD possui uma quantidade maior de restrições e variáveis, necessitando de maior tempo computacional, porém sua utilização se justifica por possuir limites mais fortes, acarretando uma solução mais próxima do ótimo. Métodos de solução como o método *relax-and-fix* poderiam ser utilizados, dado que este garante uma boa solução para este tipo de modelo em um tempo computacional aceitável.

Uma discussão aprofundada sobre este método pode ser vista em Kelly & Mann (2004).

O modelo MPLIM-HDP é uma alternativa aos modelos da literatura, retornando resultados similares aos do modelo MPLIM-HD. No entanto, o primeiro requer maior tempo computacional, devido ao comportamento da ordem de crescimento de suas variáveis e restrições, sendo mais bem utilizado para Relaxação Lagrangeana. Como vantagens, apresenta subperíodos de tamanhos idênticos, o que garante a homogeneidade do tempo de produção.

## Agradecimentos

A primeira autora agradece o suporte financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG.

## Referências

- Allahverdi, A., Ng, C. T., Cheng, T. C. E., & Kovalyov, M. Y. (2008). A survey of scheduling problems with setup times or costs. *European Journal of Operational Research*, 187(3), 985-1032. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.060>.
- Araujo, S. A., Arenales, M. N., & Clark, A. R. (2004). Dimensionamento de lotes e programação do forno numa fundição de pequeno porte. *Gestão & Produção*, 11(2), 165-176. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2004000200003>.
- Araujo, S. A., Arenales, M. N., & Clark, A. R. (2007). Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. *Journal of Heuristics*, 13(4), 337-358. <http://dx.doi.org/10.1007/s10732-007-9011-9>.
- Arenales, M., Armentano, V. A., Morabito, R., & Yanasse, H. H. (2007). *Pesquisa operacional*. 6 ed. Rio de Janeiro: Elsevier. 524 p.
- Bernardes, E. D., Araujo, S. A., & Rangel, S. (2010). Reformulação para um problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes. *Pesquisa Operacional*, 30(3), 637-655.
- Brahimi, N., Dauzere-Peres, S., Najid, N. M., & Nordli, A. (2006). Single item lot sizing problems. *European Journal of Operational Research*, 168(1), 1-16. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2004.01.054>.
- Brasil. Ministério de Minas e Energia – MME. (2009). Recuperado em 15 de maio de 2014, de <http://www.mme.gov.br/mme>
- Bustamante, L. (2007). *Minimização do custo de antecipação e atraso para o problema de sequenciamento de uma máquina com tempo de preparação dependente da sequência: aplicação em uma usina siderúrgica* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Buxey, G. (1989). Production scheduling: practice and theory. *European Journal of Operational Research*, 39(1), 17-31. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(89\)90349-4](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(89)90349-4).
- Carvalho, C. R. V., & Santos, A. M. (2006). Dimensionamento de lote de produção em um problema de sequenciamento de uma máquina com tempo de preparação: aplicação a uma indústria química. In *Anais do 38º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (pp. 1922-1933). Goiânia: SBPO.
- Chen, J., & Askin, R. G. (2009). Project selection, scheduling and resource allocation with time dependent returns. *European Journal of Operational Research*, 193(1), 23-34. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2007.10.040>.
- Clark, G. E. A., Almada-Lobo, B., & Almeder, C. (2011). Lot sizing and scheduling: industrial extensions and research opportunities. *International Journal of Production Research*, 49(9), 2457-2461. <http://dx.doi.org/10.1080/00207543.2010.532908>.
- De Paula, M. R., Mateus, G. R., & Ravetti, M. G. (2010). A non-delayed relax-and-cut algorithm for scheduling problems with parallel machines, due dates and sequence-dependent setup times. *Computers & Operations Research*, 37(5), 938-949. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.07.006>.
- Defalque, C. M., Rangel, S., & Ferreira, D. (2011). Usando o ATSP na modelagem do problema integrado de produção de bebidas. *TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 12(3), 195-209. <http://dx.doi.org/10.5540/tema.2011.012.03.0195>.
- Du, J., & Leung, J. Y. T. (1990). Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard. *Mathematics of Operations Research*, 15(3), 483-495. <http://dx.doi.org/10.1287/moor.15.3.483>.
- Fernandes, F. C. F., & Santoro, M. C. (2005). Avaliação do grau de prioridade e do foco do planejamento e controle da produção (PCP): modelos e estudos de casos. *Gestão & Produção*, 12(1), 25-38. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2005000100004>.
- Ferreira, D., Morabito, R., & Rangel, S. (2009). Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 196(2), 697-706. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.03.035>.
- Ferreira, D., Morabito, R., & Rangel, S. (2010). Relax and fix heuristics to solve one-stage one-machine lot-scheduling models for small-scale soft drink plants. *Computers & Operations Research*, 37(4), 684-691. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.06.007>.
- Henriques, R. S., Carvalho, C. R. V., & Cunha, A. S. (2010). Um modelo com variáveis indexadas no tempo para a integração do Dimensionamento de Lotes e Sequenciamento em uma máquina com tempos de preparação. In *Anais do XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Bento Gonçalves: SBPO.
- Keha, A. B., Khowala, K., & Fowler, J. W. (2009). Mixed integer programming formulations for single machine scheduling problems. *Computers & Industrial Engineering*, 56(1), 357-367. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2008.06.008>.
- Kelly, J. D., & Mann, J. L. (2004). Flowsheet decomposition heuristic for scheduling: a relax-and-fix method.

- Computers & Chemical Engineering*, 28(11), 2193-2200. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2004.03.009>.
- Lawler, E. L. (1976). *Combinatorial optimization: networks and matroids*. New York: Holt, R. & Winston. 362 p.
- Leung, J. Y.-T. (2004). *Handbook of scheduling: algorithms, models, and performance analysis*. Boca Raton: Chapman & Hall /CRC. 1224 p.
- Loveland, J. L., Monkman, S. K., & Morrice, D. J. (2007). Dell uses a new production scheduling algorithm to Accommodate Increased Product Variety. *Interfaces*, 37(3), 209-219. <http://dx.doi.org/10.1287/inte.1060.0264>.
- Magnesita Refratários. (2015). *Soluções refratárias*. Recuperado em 23 de fevereiro de 2015, de <http://ri.magnesita.com>
- Manne, A. S. (1960). On the job-shop scheduling problem. *Operations Research*, 8(2), 219-223. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.8.2.219>.
- Molina, F., Morabito, R., & Araujo, S. A. (2013). Modelos matemáticos para problemas de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade e custos de transporte. *Gestão & Produção*, 20(3), 573-586. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2013000300006>.
- Nemhauser, G. L., & Wolsey, L. A. (1988). *Integer and combinatorial optimization*. New York: Wiley.
- Nogueira, T. H. (2008). *Modelagem do sequenciamento da ensilagem em processos industriais de formação de receitas* (Dissertação de mestrado). Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Nogueira, T. H. (2014). *Single machine scheduling problems with sequence dependent setup times* (Tese de doutorado). Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Pinedo, M. L. (2012). *Scheduling: theory, algorithms, and systems*. 4 ed. Nova York: Springer.
- Pochet, Y., & Wolsey, L. A. (2006). *Production planning by mixed integer programming* (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering). Nova York: Springer. 499 p.
- Ramos, R. S., & Oliveira, F. B. (2011). Uma abordagem ao problema de sequenciamento em uma máquina com penalidades por antecipação e atraso da produção por meio de algoritmos evolutivos. *Conexão Ciência*, 6(2), 21-37.
- Rego, M. F. (2013). *Algoritmos multiobjetivos para o problema de sequenciamento de tarefas em uma máquina com tempo de preparação dependente da sequência e da família* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- Santos, A. M. (2006). *Dimensionamento de lote de produção em um problema de seqüenciamento de uma máquina com tempo de preparação: aplicação a uma indústria química* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Santos, M. O., & Massago, S. (2007). Um método heurístico para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com custos e tempo das preparações sequenciais dependentes. *Anais do 39º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Fortaleza: SBPO.
- Seannner, F., & Meyr, H. (2013). Multi-stage simultaneous lot-sizing and scheduling for flow line production. *OR-Spektrum*, 35(1), 33-73. <http://dx.doi.org/10.1007/s00291-012-0296-1>.
- Shim, I.-S., Kim, H.-C., Doh, H.-H., & Lee, D.-H. (2011). A two-stage heuristic for single machine capacitated lot-sizing and scheduling with sequence-dependent setup costs. *Computers & Industrial Engineering*, 61(4), 920-929. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2011.06.002>.
- Sousa, J. P., & Wolsey, L. A. (1992). A time indexed formulation of non-preemptive single machine scheduling problems. *Mathematical Programming*, 54(1-3), 353-367. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01586059>.
- Stadtler, H. (2010). Multi-level single machine lot-sizing and scheduling with zero lead times. *European Journal of Operational Research*, 209(3), 241-252. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2010.09.022>.
- Stadtler, H., & Sahling, F. (2012). A lot-sizing and scheduling model for multi-stage flow lines with zero lead times. *European Journal of Operational Research*, 225(3), 404-419. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2012.10.011>.
- Tavares, L. V. (2002). A review of the contribution of operational research of project management. *European Journal of Operational Research*, 136(1), 1-18. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00097-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00097-2).
- Toledo, C. F., França, P. M., Morabito, R., & Kimms, A. (2007). Um modelo de otimização para o problema integrado de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábricas de refrigerantes. *Pesquisa Operacional*, 27(1), 155-186. <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-74382007000100009>.
- Toso, E. A. V., & Morabito, R. (2005). Otimização no dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: estudo de caso numa fábrica de rações. *Gestão & Produção*, 12(2), 203-217. <http://dx.doi.org/10.1590/S0104-530X2005000200006>.
- Toso, E. A., Morabito, R., & Clark, A. R. (2009). Lot sizing and sequencing optimization at an animal-feed plant. *Computers & Industrial Engineering*, 57(3), 813-821. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2009.02.011>.
- Unlu, Y., & Mason, S. J. (2010). Evaluation of mixed integer programming formulations for non-preemptive parallel machine scheduling problems. *Computers & Industrial Engineering*, 58(4), 785-800. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cie.2010.02.012>.
- Wolsey, L. A. (2008). Mixed integer programming. In W. W. Benjamin (Ed.). *Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering* (pp. 1-10). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Yamashita, D. S., & Morabito, R. (2007). Um algoritmo exato para o problema de programação de projetos com custo de disponibilidade de recursos e múltiplos modos. *Pesquisa Operacional*, 27(1), 27-49.